

Betreuer: A. Schröder

Fortgeschrittenen-Praktikum am
II. Physikalischen Institut

Mikrowellen¹

Oliver Flimm
Oberstraße 74
51149 Köln

Uwe Münch
Schmittgasse 92
51143 Köln

Wintersemester 94/95²

e-mail: flimm@ph-cip.uni-koeln.de
muench@ph-cip.uni-koeln.de

¹Versuch 21

²Durchführung des Versuchs: 7.11.94

Inhaltsverzeichnis

1 Mikrowellen und Mikrowellentechnik	1
1.1 Einleitung und allgemeine Anwendungen	1
1.2 Elektrodynamik allgemein und im Hohlleiter	1
1.2.1 Elektrodynamik allgemein	1
1.2.2 Elektromagnetische Wellen im Vakuum, freier Raum	3
1.2.3 Elektromagnetische Wellen im vakuum-gefüllten Hohlleiter	5
1.2.4 Leitergleichungen und Impedanzen	10
1.3 Technische Aspekte	13
1.3.1 Erzeugung von Mikrowellen: Impatt-Diode	13
1.3.2 Mikrowellen-Bauteile	14
1.4 Anwendungen der Mikrowellen	17
1.4.1 Polarisierbarkeit und Dielektrizitätskonstante	17
1.4.2 Doppler-Effekt	22
2 Auswertung	24
2.1 Kennlinie der Impatt-Diode	24
2.2 Wellenlänge	25
2.3 Impedanzmessung	26
2.4 Die Dielektrizitätskonstante	27
2.4.1 Messung im Hohlleiter	27
2.4.2 Messung im freien Raum	29
2.5 Doppler-Effekt	30
Literaturverzeichnis	32
Index	33

Abbildungsverzeichnis

1.1	Skizze eines Hohlleiters	5
1.2	Feldverteilungen und Wandströme der H_{10} -Mode	9
1.3	Stehende Wellen bei verschiedenen Abschlußwiderständen	11
1.4	Dotierungsprofil und elektrische Feldverteilung einer Impatt-Diode	13
1.5	Kennlinie der Impatt-Diode	13
1.6	Schaltung und Schema der Impatt-Diode	13
1.7	Mikrowellen-Resonator	14
1.8	Modulation der Diodenspannung und zeitliche Verschiebung des Stroms	14
1.9	Absorber	15
1.10	Einweghohlleiter	15
1.11	Dämpfungsglieder	15
1.12	Phasenschieber	16
1.13	Hornstrahler	16
1.14	Stehwellendetektor	16
1.15	Resonanz in der Frequenzabhängigkeit der DK	18
1.16	Relaxation in der Frequenzabhängigkeit der DK	19
1.17	Frequenzabhängigkeit der DK	19
1.18	DK-Messung in einem vollständig gefüllten Hohlleiter	21
1.19	DK-Messung im freien Raum	21
2.0	Aufbau zur Leistungsmessung der Impatt-Diode	24
2.1	Kennlinie der Impatt-Diode	25
2.2	Aufbau zur Messung der Wellenlänge	25
2.3	Aufbau zur Messung der Impedanz	26
2.4	Aufbau zur Messung der DK im Hohlleiter	28
2.5	Aufbau zur Messung der DK im freien Raum	29
2.6	Aufbau zur Messung des Doppler-Effekts	30

1. Mikrowellen und Mikrowellentechnik

In diesem Versuch werden wir uns mit Mikrowellen beschäftigen. Nach einer allgemeinen Einleitung über diese und ihre Anwendungen auch in der Alltagspraxis werden wir nochmal die theoretischen Grundlagen elektromagnetischer Wellen wiederholen. Wir modifizieren dies dann auf das Verhalten elektromagnetischer Wellen in Hohlleitern, was wir im Detail analysieren und dann auch im Versuch untersuchen werden. Wir stellen sodann die Bauteile vor, mit denen wir die Erzeugung, Leitung und Messung von Mikrowellen realisieren. Abschließend untersuchen wir die Effekte, die wir beispielhaft als Mikrowellenanwendungen ausprobieren werden. Hiernach folgt dann natürlich – wie immer – noch die Auswertung des Versuchs.

1.1 Einleitung und allgemeine Anwendungen

Elektromagnetische Wellen, deren Wellenlängen zwischen 0,3 mm und 3 m liegen, nennt man *Mikrowellen*. Zu kürzeren Wellenlängen nennt man die elektromagnetische Strahlung *Infrarot-Strahlung*, zu längeren Wellenlängen werden die Wellen *Ultra-Kurzwellen* genannt und im Rundfunk für UKW-Übertragungen verwendet. In Frequenzen ausgedrückt liegt der Mikrowellenbereich also zwischen 100 MHz und 1 THz.

Mikrowellen finden vielseitige Anwendungen. Man verwendet sie zur Spektroskopie verschiedener Moleküle und daher auch zur Ionosphärenforschung und Radioastronomie. Sehr bekannt ist natürlich die Anwendung im Mikrowellenherd, in dem die Dipolpolarisation (s. u.) genutzt wird, um wasserhaltige Stoffe zu erhitzen. Eine solche gezielte Erhitzung wird auch bei Körpergeweben in der Medizin angewandt. Weiteren Nutzen bringen Mikrowellen in der Entfernungs- und Geschwindigkeitsmessung als Radar. Letzteres wollen wir in diesem Versuch auch beispielhaft aufbauen.

1.2 Elektrodynamik allgemein und im Hohlleiter

Da Mikrowellen spezielle elektromagnetische Wellen sind, wollen wir uns zunächst allgemein mit solchen beschäftigen. Nach einer Betrachtung des Verhaltens allgemein und im freien Raum schauen wir uns dann Rechteckhohlleiter an, die wir zur Handhabung von Mikrowellen im Versuch nutzen werden.

1.2.1 Elektrodynamik allgemein

Wir werden die Elektrodynamik sowohl im äußeren Kalkül als auch klassisch darstellen. Im äußeren Kalkül¹ beschreibt man die elektrodynamischen Größen in einer koordinatenunabhängigen Weise auf einer beliebigen 4-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Erst nach einer Raum-Zeit-Blätterung dieser Mannigfaltigkeit erhält man die klassisch bekannten Größen. Aus diesem Grunde beginnen

¹Vergleiche hierzu mit [TP2], [Rel2] und für die mathematischen Hilfsmittel mit [Diff].

wir mit axiomatischen Forderungen im äußeren Kalkül und interpretieren diese Forderungen dann nach Zerlegung mittels einer Raum-Zeit-Blätterung.

Wir fordern die Existenz einer geschlossenen 3-Form J (1. Axiom), also

$$dJ = 0.$$

Wenn die Mannigfaltigkeit differenzierbar zusammenziehbar ist (vgl. hierzu [Diff, Kap 11.3, 11.13]), dann existiert eine 2-Form G , sodaß $J = dG$. In der Raum-Zeit-Blätterung kann man $J = \rho + j \wedge \frac{1}{c} dx^0$ ($dx^0 = c \cdot dt$) schreiben, mit einer räumlichen 3-Form ρ und einer 2-Form j . Integriert man ρ über ein räumliches Volumen, so erhält man die Ladung Q (ein Skalar), ρ ist also die klassische Ladungsdichte. Unter Beachtung, daß ρ eine räumliche 3-Form ist, sieht man direkt, daß die Forderung $dJ = 0$ der klassischen Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} j = 0$ entspricht (alle klassischen Differentialoperatoren (div , rot , grad) wirken nur auf die räumlichen Anteile). Was ist nun unter G zu verstehen? Unter der Blätterung kann man $G = D + H \wedge \frac{1}{c} dx^0$ schreiben, wobei D (2-Form) bzw. H (1-Form) die elektrische bzw. magnetische Erregung ist, die also die Auswirkungen der Ladungen und Ströme charakterisieren. Klassisch nennt man H zwar Feldstärke, was aber von der Bedeutung dieser Größe her nicht richtig ist; ist nur historisch so benannt. Die Gleichung

$$J = dG$$

entpuppt sich also als eine Gleichung, die zwei klassische Maxwell-Gleichungen beinhaltet (hier symbolisiert \mathfrak{d} die 3-dimensionale räumliche äußere Ableitung):

$$\begin{aligned} j &= \frac{\partial}{\partial t} D + \mathfrak{d}H & \iff & \quad j = \frac{\partial D}{\partial t} + \operatorname{rot} H \\ \rho &= \mathfrak{d}D & & \quad \rho = \operatorname{div} D \end{aligned}$$

Wir fordern nun unser 2. Axiom, die Existenz einer geschlossenen 2-Form F , also

$$dF = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt nun die Erhaltung des elektro-magnetischen Flusses. Dies wird deutlich, wenn man mittels der Blätterung $F = E \wedge \frac{1}{c} dx^0 + B$ schreibt. Hierbei entspricht die 1-Form E der elektrischen Feldstärke und die 2-Form B der magnetischen Feldstärke. Vorsicht: Man beachte, daß klassisch häufig H Feldstärke (und nicht Erregung) genannt wird (s. o.); dann wird B Flußdichte genannt (zu diesen Namen sagen wir gleich noch etwas). Nach der Blätterung entpuppt sich nun die eine Gleichung $dF = 0$ als eine, die wiederum zwei klassische Maxwell-Gleichungen beinhaltet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}E + \frac{\partial}{\partial t} B = 0 & \iff \quad \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ \mathfrak{d}B = 0 & \quad \operatorname{div} B = 0 \end{aligned}$$

Zunächst einmal fällt auf, daß bei unserer Axiomatik *gefolgert* wird, daß keine magnetischen Monopole existieren. Es wird also deutlich, an welchen Erfahrungstatsachen wir rütteln müßten, falls magnetische Monopole doch existieren sollten (Kontinuitätsgleichung und Faraday'sches Induktionsgesetz (s. u.)).

Zur Verdeutlichung schreiben wir die Gleichungen nochmal in Integralform, was mittels des Stoke'schen Integralsatzes $\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega$ leicht gelingt: Unser Axiom wird dann zu

$$\int_{\partial V^3} F = 0$$

für den Rand beliebiger 3-dimensionaler Hyperflächen V^3 . In der Blätterung ergibt sich zum einen das Faraday'sche Induktionsgesetz

$$\int_{\partial V^2} E = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V^2} B$$

für alle räumlichen Hyperflächen, zum anderen

$$\int_{\partial V^3} B = 0 \quad (1.1)$$

für alle räumlichen Volumina. Da also jeweils die Integrale von B über Flächen auftreten (und man diese Integrale Flüsse nennt), hat man klassisch das B auch Fluß-(flächen)-dichte genannt. Wenn man aber ein drittes Axiom, nämlich die Kopplung an Kräfte über die allgemeine Lorentzkraft (worauf wir hier nicht eingehen), beachtet, dann geht dort nur die 2-Form F ein, sodaß B und E Feldstärken sind und die beiden obigen Maxwell-Gleichungen die Entwicklung und Kopplung dieser Feldstärken beschreiben.

Da wir nur 6 zeitabhängige Differentialgleichungen für 12 Größen (jeweils 6 Komponenten der 2-Formen F und G) vorliegen haben, müssen wir nun noch den Zusammenhang zwischen den Feldstärken (den Kräften) und den Erregungen (den Ladungen und Strömen) herstellen, indem wir folgende Forderung für das Vakuum aufstellen (für Materialien modifizieren wir dies (ausgehend von den klassischen Beziehungen) später):

$$G = * \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} F . \quad (1.2)$$

Hierbei steht $*$ für den Hodge-Operator (vgl. [Rel2], [TP2] oder [Diff]) und die Konstanten ε_0 und μ_0 sind eingefügt, um – zusammen mit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ für die Lichtgeschwindigkeit – die üblichen Gleichungen im SI (systeme internationale) zu erhalten. Während die Konstanten also maßsystemabhängig und damit willkürlich sind, beruht die Benutzung des Hodge-Operators auf Symmetrieforderungen (Paritätserhaltung der elektromagnetischen Wechselwirkung), dies ist die einzige Stelle, an der wir die Metrik des umgebenden Raums (evtl. durch Massen beeinflusst) in die Elektrodynamik einbauen. In der Blätterung erhalten wir die klassisch bekannten Gesetze

$$\begin{aligned} D &= *\varepsilon_0 E , \\ H &= *\frac{1}{\mu_0} B . \end{aligned}$$

1.2.2 Elektromagnetische Wellen im Vakuum, freier Raum

So, nun haben wir lange genug die Zusammenhänge und Grundlagen der Elektrodynamik wiederholt. Wir wollen nun aus den Maxwell-Gleichungen die Wellengleichung herleiten. Dazu wiederholen wir unsere Voraussetzung, daß die Mannigfaltigkeit differenzierbar zusammenziehbar ist. Dann existiert nämlich eine 1-Form, sodaß $F = dA$. In der Blätterung ist $A = -\phi dt + \mathcal{A}$, wobei \mathcal{A} die magnetische Potential-1-Form (also klassisch: $B = d\mathcal{A} \iff B = \text{rot } \mathcal{A}$) und ϕ das elektrische Potential (klassisch $E = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$); man nennt A daher auch Potential-1-Form. Natürlich ist unsere Potential-1-Form nicht eindeutig, mit A ist auch $A + d\psi$ ein geeignetes Potential (da $dd\omega = 0$ für alle Differentialformen ω). Wir wählen eine spezielle Eichung, die *Lorentz-Eichung*:

$$d * A = 0 . \quad (1.3)$$

Wir spezialisieren nun unseren Raum zu einem Minkowski-Raum, d. h. $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ mit der Metrik $g = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Lokal ist dies immer möglich; wir fordern dies hier aber global, was folgendes bedeutet: Wir vernachlässigen Massen (also z. B. Ablenkung von Licht durch die Sonne) und wir gehen

davon aus, daß unser Universum als ganzes flach ist. Diese Forderungen sind nichts Besonderes, da sie in den üblichen klassischen Betrachtungen immer implizit auch gestellt werden; wir sagen es hier nur deutlich, daß wir spezielle Koordinaten wählen (in der klassischen Beschreibung verschweigt man dies ja gern). Dann können wir unsere Eichung (1.3) in Koordinaten folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial A_t}{\partial t} - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} = - \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Wir ernten nun die Früchte unserer Arbeit und fügen zusammen:

$$*d * dA = *d * F = *d \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} G = * \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} J. \quad (1.5)$$

Nun müssen wir uns noch etwas anstrengen und den Laplace-Operator allgemein definieren: Dieser ist ein Differential-Operator, der auf k -Formen in einem n -dimensionalen Raum wirkt und als Ergebnis wieder eine k -Form liefert. Die Definition sieht nun so aus ($\text{sgn}(g)$ ist das Vorzeichen der Determinante der Metrik g):

$$\Delta := (-1)^{nk} \text{sgn}(g) \cdot (*d * d + (-1)^n \cdot d * d*) .$$

In einer Raum-Zeit gilt $\text{sgn}(g) = -1$, $n = 4$ und mit $k = 1$ und unserer speziellen Eichung (1.3) gilt daher also, aus (1.5) folgend:

$$-\Delta A = * \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} J. \quad (1.6)$$

In unseren speziellen Koordinaten eines Minkowski-Raums können wir nun einen zum Rechnen geeigneten Ausdruck für Δ finden, es gilt (nach einer (hier ausgelassenen) längeren Rechnung):

$$\Delta A = (\square A_\mu) dx^\mu \quad \text{mit } \square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{und } \mu = t, x, y, z .$$

Damit läßt sich nun obige Differentialgleichung (1.6) für A koordinatenabhängig als Wellengleichung schreiben:

$$-\square A_\mu = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot J_\mu \quad \text{wobei } \mu = t, x, y, z .$$

Dies ergibt sich auch klassisch über Operatorgleichungen à la ‚rot rot = ∇ div - Δ ‘.

Jetzt nutzen wir endlich aus, daß unser freier Raum mit Vakuum „gefüllt“ sein soll: Dann ist nämlich $J \equiv 0$. Wir haben also

$$\square A_\mu = 0 \quad (1.7)$$

zu lösen für alle μ ; dabei sind keine Randbedingungen gegeben, da unsere Welle im freien Raum angesiedelt sein soll.

Wir wollen nun nicht die allgemeinste Lösung dieser Differentialgleichung betrachten, sondern die der *ebenen Welle*. Hierbei ist die Ausbreitungsrichtung (bzw. die dazu normale Ebene) ausgezeichnet; unter geeigneten Näherungen kann man alle Wellenformen durch ebene Wellen annähern. Da wir im Hohlleiter ausgezeichnete Ebenen/Richtungen vorliegen haben werden, ist diese Spezialisierung im freien Raum aber sowieso gerechtfertigt. Bei einer ebenen Welle in z -Richtung sind die Lösungen A_μ zu $\exp(ikz - i\omega t)$ proportional. Einsetzen in die Differentialgleichung bestätigt, daß dies eine Lösung ist, wenn $\omega = kc$ gilt. Wir wollen uns nun noch die Proportionalitätskonstanten ansehen und dann die Felder E und B berechnen. Unsere Lösung sieht bisher so aus:

$$\begin{aligned} \phi &= -A_0 = \mathcal{K} \cdot \exp(ikz - ickt) , \\ \mathcal{A}_x &= A_1 = \mathcal{M} \cdot \exp(ikz - ickt) , \\ \mathcal{A}_y &= A_2 = \mathcal{N} \cdot \exp(ikz - ickt) , \\ \mathcal{A}_z &= A_3 = \mathcal{Q} \cdot \exp(ikz - ickt) . \end{aligned}$$

Wir müssen nun unsere Eichbedingung (1.4) beachten, aus der $\mathcal{K} = c \cdot \mathcal{Q}$ folgt. Damit haben wir nun

$$\begin{aligned}\phi &= -A_0 = c \cdot \mathcal{Q} \cdot \exp(ikz - ickt), \\ \mathcal{A}_x &= A_1 = \mathcal{M} \cdot \exp(ikz - ickt), \\ \mathcal{A}_y &= A_2 = \mathcal{N} \cdot \exp(ikz - ickt), \\ \mathcal{A}_z &= A_3 = \mathcal{Q} \cdot \exp(ikz - ickt).\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Felder E und B :

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}_x = ick \cdot \mathcal{M} \cdot \exp(ikz - ickt), \\ E_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}_y = ick \cdot \mathcal{N} \cdot \exp(ikz - ickt), \\ E_z &= -\frac{\partial}{\partial z}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}_z = -ick \cdot \mathcal{Q} \cdot \exp(ikz - ickt) + ick \cdot \mathcal{Q} \exp(ikz - ickt) = 0 \\ \text{und } B_x &= \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{A}_z - \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{A}_y = -ik \cdot \mathcal{N} \cdot \exp(ikz - ickt), \\ B_y &= \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{A}_x - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_z = +ik \cdot \mathcal{M} \cdot \exp(ikz - ickt), \\ B_z &= \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_y - \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{A}_x = 0.\end{aligned}$$

Da weiterhin $H_\mu = \frac{1}{\mu_0} \cdot B_\mu$ und $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, gilt also:

$$E_x = \eta_0 \cdot H_y, \quad E_y = -\eta_0 H_x, \quad E_z = H_z = 0,$$

wobei $\eta_0 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ der sogenannte *Wellenwiderstand* des freien Raumes ist. Da er nur von Naturkonstanten abhängt, ist er natürlich auch eine und es gilt:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vsec}}{\text{Am}}}{8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Assec}}{\text{Vm}}}} = 376,73 \Omega.$$

Da $B_z = 0$ und auch $E_z = 0$ hat die elektromagnetische Welle nur Anteile, die normal zur Ausbreitungsrichtung sind. Man nennt solche Wellen *rein transversal* oder *TEM-Mode* (weitere Klassifizierung: s. u.).

1.2.3 Elektromagnetische Wellen im vakuum-gefüllten Hohlleiter

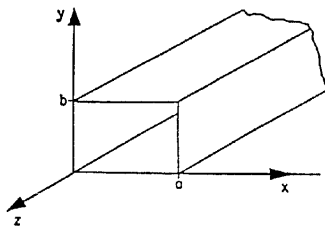


Abb. 1.1: Skizze eines Hohlleiters

Wir wollen nun elektromagnetische Wellen in Hohlleitern betrachten. Ein Hohlleiter ist hierbei z. B. ein rechteckiges, metallisches Rohr; eine Skizze hierzu haben wir nebenstehend aus [Nimtzt] eingescannt. Wir legen die z -Achse in die „Rohr-Richtung“, also in die Richtung, in der sich Wellen (wenn überhaupt) ausbreiten können und nicht auf eine Wand stoßen. Die Wände in x - und y -Richtung sind metallisch und wirken daher als Spiegel. Dies bedeutet, daß wir die obigen Betrachtungen durch Randbedingungen modifizieren müssen.

Wir werden die Wellengleichung über einen Separationsansatz lösen. Dabei setzen wir die Lösungen A_μ proportional zu $\exp(ik_x x) \cdot \exp(ik_y y) \cdot \exp(ik_z z) \cdot \exp(-i\omega t)$ an, also ebenen Wellen parallel zu den

ausgezeichneten Ebenen des Rechteckhohlleiters. Man nennt diesen Ansatz harmonischen Ansatz, da ja die einzelnen ortsabhängigen Funktionen harmonische Funktionen sind; er ist durch die Geometrie des Hohlleiters begründet.

Wir verazten jetzt zunächst die Randbedingungen. Unser Hohlleiter ist metallisch und sogar mit einer Silberschicht bedampft, um sehr gut leitfähig zu sein. Daher können alle Oberflächenladungen einem tangentialen Feld E_t direkt folgen; somit muß sich die insgesamt wirkende tangentiale elektrische Feldstärke E_t an den Hohlleitergrenzen zu Null ergeben. Um dies zu gewährleisten, modifizieren wir unseren Ansatz und verlangen zum einen, daß das elektrische Potential ϕ auf den Rändern $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ konstant ist, wir setzen also ϕ an diesen Rändern einfach gleich Null. Zum anderen beachten wir Gleichung (1.1) und die Folgerung daraus, daß die Normalkomponente von B stetig sein muß (vergleiche zu diesen Dingen mit [AP-O319] für Isolatorübergänge und [Jac, sect. 8.1] für unseren Fall). Im Gegensatz zu den Fresnel-Formeln ([AP-O319]) gilt nicht die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von H , da in unserem gut leitenden Fall immer direkt der ausgleichende Strom j induziert wird. Dieser bewirkt auch, daß die Normalkomponente von H im leitenden Teil Null ist, und damit auch die Normalkomponente von B (da B und H proportional sind (keine Ferromagnetika)). Daher müssen die Normalkomponenten von B an den Stellen $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ Null sein. Mit den Abweichungen, die dadurch entstehen, daß unser Hohlleiter nicht ideal leitet, beschäftigt sich [Jac, sect 8.1] weiter; sie fallen nicht weiter ins Gewicht, sodaß wir weiterhin von einem idealen Leiter ausgehen. Wir müssen also nun das Potential \mathcal{A} derart anpassen, daß unsere Bedingungen für die Tangentialkomponenten von E und die Normalkomponenten von B an den Grenzen erfüllt sind. Unsere Forderungen werden nun durch den folgenden Ansatz erfüllt. Wir haben hierbei die Exponentialfunktionen $\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ so angepaßt, daß die jeweils entscheidenden Potentiale an den Rändern gleich Null sind, m und n sind beliebige natürliche Zahlen:

$$\begin{aligned}\phi &= -A_0 = \mathcal{K} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(-i\omega t), \\ \mathcal{A}_x &= A_1 = \mathcal{M} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(-i\omega t), \\ \mathcal{A}_y &= A_2 = \mathcal{N} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(-i\omega t), \\ \mathcal{A}_z &= A_3 = \mathcal{Q} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(-i\omega t).\end{aligned}$$

Bevor wir durch Berechnung von B und E bestätigen, daß diese Potentiale unsere Randbedingungen beachten, analysieren wir die Potentiale genauer. Aus der Wellengleichung erhalten wir (analog zu $\omega = kc$ im freien Raum) zunächst folgende Bedingung:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + k^2.$$

Da die Frequenz ω über $E = \hbar\omega$ die Energie der Quanten festlegt, ist die Frequenz im freien Raum und im Hohlleiter unverändert. Daher bezeichnen wir nun das k vom freien Raum mit k_0 und rechnen mit $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ um: Es gilt nun $\omega = ck_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$. Auch das k , welches die Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung entlang des Hohlleiters beschreibt, rechnen wir über $k = \frac{2\pi}{\lambda_L}$ um. Somit erhalten wir nun

$$\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_L}\right)^2$$

als Bedingung. Wir definieren nun von n und m abhängige *Cut-off-Wellenlängen* λ_c (die Namensgebung wird gleich klar werden) über

$$\lambda_c := \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2}}.$$

Damit läßt sich unsere Wellengleichungsbedingung nach der Wellenlänge λ_L in Ausbreitungsrichtung auflösen:

$$\left(\frac{1}{\lambda_L}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 = \frac{\lambda_c^2 - \lambda_0^2}{\lambda_0^2 \cdot \lambda_c^2} \iff \lambda_L = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}. \quad (1.8)$$

Für Wellenlängen λ_0 im freien Raum, die kleiner sind als die von der Geometrie des Hohlleiters und von n und m abhängige Cut-off-Wellenlänge λ_c , ist die Wellenlänge im Hohlleiter λ_L reell, sodaß auch das k reell ist und somit sind die Potentiale und daraus folgend auch die Feldstärken laufende Wellen, was ja durch $\exp(ikz - i\omega t)$ beschrieben ist. Das ist der Bereich, in dem sich Wellen der sogenannten *Mode nm* ausbreiten können. Ist aber $\lambda_0 > \lambda_c$, so ist λ_L und somit auch k imaginär. Nun sind die Potentiale und Feldstärken nur noch stark abfallende Exponentialfunktionen der Form $\exp(-kz)$. Die Wellen sind nun gar keine Wellen mehr; man nennt sie *evaleszente Moden nm*. Da der Übergang von Welle zur abfallenden Exponentialfunktion gerade bei $\lambda_0 = \lambda_c$ stattfindet, nennt man λ_c die Cut-off-Wellenlänge.

Wir können dies natürlich auch in Frequenzen ausdrücken. Bei niedrigen Frequenzen wird gar keine Wellenausbreitung im Hohlleiter stattfinden, da alle Moden abgeschnitten sind. Üblicherweise ist $a > b$, daher wird λ_c am größten für $n = 1, m = 0$. Das bedeutet, daß als erste Welle die 10-Mode ab einer Frequenz ω_{10} möglich wird, alle anderen sind noch abgeschnitten. Wir übernehmen nun aus [Jac] eine Tabelle für die Verhältnisse $\frac{\omega_{nm}}{\omega_{10}}$, wenn $a = 2b$ (dies ist bei uns zwar nicht exakt erfüllt, sondern nur fast; aber wir wollen ja jetzt nur einen qualitativen Überblick):

		m			
		0	1	2	3
n	0		2,00	4,00	6,00
	1	1,00	2,24	4,13	
	2	2,00	2,84	4,48	
	3	3,00	3,61	5,00	
	4	4,00	4,48	5,66	
	5	5,00	5,39		
	6	6,00			

Wir können also ablesen, daß die 20-Mode und die 01-Mode ab der doppelten ersten Grenzfrequenz ω_{10} sich zu der 10-Mode gesellt. Schon bald danach kommt die 11-Mode, dann die 21-Mode, die 30-Mode, die 31-Mode, nun gleichzeitig die 40- und 12-Mode bei $4\omega_{10}$, usw.

Für den Fall sich ausbreitender Wellen berechnen wir nun endlich die Feldstärken E und B . Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_x = (-\mathcal{K} \cdot \frac{n\pi}{a} + i\omega\mathcal{M}) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\
 E_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_y = (-\mathcal{K} \cdot \frac{m\pi}{b} + i\omega\mathcal{N}) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\
 E_z &= -\frac{\partial}{\partial z}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_z = (-ik\mathcal{K} + i\omega\mathcal{Q}) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\
 \text{und } B_x &= \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y = (\mathcal{Q} \cdot \frac{m\pi}{b} - ik\mathcal{N}) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\
 B_y &= \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z = (-\mathcal{Q} \cdot \frac{n\pi}{a} + ik\mathcal{M}) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\
 B_z &= \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = (\mathcal{N} \cdot \frac{n\pi}{a} - \mathcal{M} \cdot \frac{m\pi}{b}) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t).
 \end{aligned}$$

Anhand dieser Gleichungen können wir nun bestätigen, daß keine tangentialen Komponenten von E auftreten, z. B. ist E_x an den x -Wänden, also bei $y = 0$ und $y = b$, gleich Null, und daß keine normalen Komponenten von B auftreten, z. B. ist B_x an den y -Wänden, also bei $x = 0$ und $x = a$, gleich Null.

Wir wollen unsere Lösungen nun klassifizieren. Da die Proportionalitätskonstanten der z -Komponenten verschieden sind, teilen wir unsere Lösung so in zwei Summanden auf, daß entweder $B_z = 0$ oder $E_z = 0$. Natürlich gibt es nun ein paar Benennungen für diese Fälle:

- Falls die z -Komponente der elektrischen Feldstärke verschwindet, also $E_z = 0$ ist, nennt man die Welle *transversale elektrische Welle*, was man *TE-Mode* abkürzt. Da dann $H_z \propto B_z \neq 0$ (s. u.), heißt diese Wellenart auch *H-Mode*.
- Sollte hingegen die z -Komponente der magnetischen Feldstärke verschwinden, also $B_z = 0$ sein, nennt man die Welle *transversale magnetische Welle*, was nun durch *TM-Mode* abgekürzt wird. In diesem Fall ist $E_z \neq 0$ (s. u.) und daher sagt man auch *E-Mode* zu dieser Welle.

Wir erinnern daran, daß man Wellen, bei denen gleichzeitig $E_z = B_z = 0$ gilt, *rein transversal* oder *TEM-Mode* nennt. Wir wollen nun zeigen, daß solche Wellen im Hohlleiter nicht vorkommen können.

Zunächst betrachten wir dazu die einfachen Fälle $n = 0$ oder $m = 0$; dann fallen einige Komponenten von vorneherein weg. Für $m = 0$ gilt: $E_x = E_z = B_y = 0$. Alle anderen Komponenten besitzen nur noch die Proportionalitätskonstante \mathcal{N} . Um $B_z = 0$ zu bekommen, müßte $\mathcal{N} = 0$ gelten; dann verschwindet aber bereits die ganze Welle. Kein besonders interessanter Fall ...

Analog gilt für $n = 0$: $E_y = E_z = B_x = 0$. Alle anderen Komponenten besitzen diesmal \mathcal{M} als Proportionalitätskonstante. Nach der gleichen Argumentation wie eben, verschwindet direkt die ganze Welle, wenn man $B_z = 0$ erzwingen will.

Bleibt der Fall zu klären, bei dem weder m noch n Null ist. Wir verlangen also, daß die Vorfaktoren von E_z und B_z verschwinden und erhalten damit (unter Ausnutzung von $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$) die Bedingungen

$$k \cdot \mathcal{K} = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \cdot \mathcal{Q}, \quad (1.9)$$

$$\frac{n\pi}{a} \cdot \mathcal{N} = \frac{m\pi}{b} \cdot \mathcal{M}. \quad (1.10)$$

Nun haben wir lange nicht mehr unsere Eichbedingung (1.4) ausgenutzt; das wollen wir jetzt ändern. Mit ihr gilt (\mathcal{M} und \mathcal{N} sind imaginär, wenn \mathcal{K} und \mathcal{Q} reell):

$$-\frac{i}{c} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \mathcal{K} + ik \cdot \mathcal{Q} = \frac{n\pi}{a} \cdot \mathcal{M} + \frac{m\pi}{b} \cdot \mathcal{N}.$$

Hier setzen wir nun unsere Vorfaktoren-Bedingungen (1.9) und (1.10) ein und erhalten:

$$-\frac{i\mathcal{K}}{c} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} - \frac{k^2 \lambda_0}{2\pi} \right) = \mathcal{M}\pi \cdot \left(\frac{n}{a} + \frac{m^2}{b^2} \frac{a}{n} \right).$$

Weiterhin wissen wir, daß

$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_L} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2 \right)$$

gilt. Also:

$$-\frac{i\mathcal{K}}{c} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2\pi} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2 \right) \right) = -\frac{i\mathcal{K}}{c} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} - \frac{2\pi}{\lambda_0} + \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2 \right) = \mathcal{M}\pi \cdot \left(\frac{n}{a} + \frac{m^2}{b^2} \frac{a}{n} \right).$$

Mit der Definition der Cut-off-Wellenlänge λ_c erhalten wir somit:

$$-\frac{i\mathcal{K}}{c} \cdot 2\pi \lambda_0 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right) = \mathcal{M}\pi \cdot \frac{a}{n} \cdot \left(\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right).$$

Wir können also direkt ablesen, daß \mathcal{K} und \mathcal{M} über

$$\mathcal{K} = i \cdot \frac{2c}{\lambda_0} \frac{a}{n} \cdot \mathcal{M}$$

zusammenhängen. Mit unserer Bedingung (1.9) erhalten wir weiter

$$\mathcal{K} = i \cdot \frac{2c}{\lambda_0} \frac{b}{m} \cdot \mathcal{N}.$$

Der Zusammenhang zwischen \mathcal{K} und \mathcal{Q} war ja bereits über Gleichung (1.10) gegeben.

Setzen wir nun unsere neuen Erkenntnisse in die Komponentenformeln der Feldstärken ein, so erhalten wir, daß alle verschwinden; wenn wir also eine rein transversale Welle erzwingen wollen, verschwindet die Welle direkt ganz. Wir rechnen die Behauptung beispielhaft für E_x vor (die Analogie von E_y zu E_x ist direkt sichtbar und wenn E ganz verschwindet, wird B auch nicht viel anderes übrigbleiben):

$$E_x = -\mathcal{K} \cdot \frac{n\pi}{a} + i\omega\mathcal{M} = -i \cdot \frac{2c}{\lambda_0} \cdot \frac{a}{n} \cdot \mathcal{M} \cdot \frac{n\pi}{a} + \frac{2\pi ic}{\lambda_0} \cdot \mathcal{M} = 0.$$

Nach all diesen Anstrengungen wollen wir nun noch konkret die bei uns auftretende Welle ausrechnen. Wir werden in einem Frequenzbereich messen, der zwischen ω_{10} und $2\omega_{10}$ liegt, d. h. bei uns wird sich nur die 10-Mode ausbreiten können. Setzen wir also $n = 1$, $m = 0$ ein und rechnen wir noch über $H = \frac{1}{\mu_0} \cdot B$ zum H -Feld um: Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_x &= 0, \\ E_y &= i\omega\mathcal{N} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\ E_z &= 0, \\ \text{und } H_x &= -i \frac{k\mathcal{N}}{\mu_0} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\ H_y &= 0, \\ H_z &= \frac{\mathcal{N}}{\mu_0} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t). \end{aligned}$$

Als letztes setzen wir jetzt noch $H_0 := \frac{\mathcal{N}}{\mu_0} \cdot \frac{\pi}{a}$ und damit ergeben sich die Felder unter Ausnutzung von $\lambda_c = 2a$ bei $m = 0$ und $n = 1$, $k = \frac{2\pi}{\lambda_L}$ und $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ in der üblichen Form:

$$\begin{aligned} E_x &= E_z = H_y = 0, \\ E_y &= i \cdot \frac{\mu_0 c \lambda_c}{\lambda_0} \cdot H_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\ H_x &= -i \frac{\lambda_c}{\lambda_L} \cdot H_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\ H_z &= H_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t). \end{aligned}$$

Wir sehen also, daß es sich um eine H-Mode handelt, die H_{10} -Mode. Die Feldverteilungen und Wandströme bei dieser Mode haben wir aus [Nimtz] eingescannt:

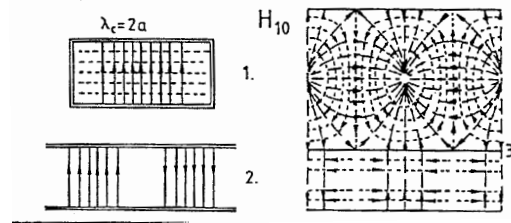


Abb. 1.2: 1. Hohlleiterquerschnitt, 2. Hohlleiterlängsschnitt, 3. Oberflächen. Jeweils: Wandströme: lang gestrichelt, elektrisches Feld: durchgezogen, magnetisches Feld: kurz gestrichelt

Abschließend wollen wir noch erwähnen, daß Richard P. Feynman in [Feyn-2, Kap. 24-8] eine ausgezeichnete Interpretation gegeben hat, wie die Cut-off-Wellenlänge zustande kommt. Da die Felder bei

der H_{10} -Mode nicht von y abhängen, läßt er die y -Wände weg, stellt in die Mitte zwischen die x -Wände einen Mikrowellensender und bildet an den x -Wänden Spiegelsender. Solange die Wellenlänge λ_0 und die x -Breite a unter einem bestimmten Winkel konstruktiv interferieren können ($\cos(\text{Winkel}) = \frac{\lambda_0}{a}$), kann sich eine Welle parallel zu den Spiegelwänden ausbreiten. Die Wellenlänge λ_L hängt mit dem Sinus des Winkels der konstruktiven Interferenz und λ_0 zusammen. Genauer findet sich im angegebenen Kapitel von [Feyn-2].

1.2.4 Leitergleichungen und Impedanzen

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen von Wellen in Hohlleitern wollen wir diese nun im Hinblick auf praktische Konsequenzen weiter analysieren. Bisher haben wir nur Wellen betrachtet, die sich unendlich lange in eine Richtung ausbreiten. In der Praxis werden die Hohlleiter aber nicht beliebig lang sein und wir müssen die Effekte am Ende eines Hohlleiters analysieren. Von den Betrachtungen von Koaxialkabeln in Versuch [FP-8a] wissen wir, daß der Begriff der Impedanz des Leiters bedeutend ist und dessen Verhältnis zum Abschlußwiderstand. Wir wollen also zunächst die Impedanz eines Hohlleiters definieren.

Wir erinnern uns ([FP-8a]), daß die Impedanz Z eines Kabels durch die Spannung zwischen den Leitungen (als Kondensator C auffaßbar) und die Ströme entlang des Kabels (als Induktivität L auffaßbar) bestimmt war; es galt: $Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Auch bei unserem Hohlleiter treten solche Spannungen zwischen gegenüberliegenden Wänden und Ströme entlang der Wände auf. Hier ist das xy -Rechteck als Spule denkbar, gegenüberliegende Wände als Kondensator. Für die H_{10} -Mode wirken bei einem Schnitt des Hohlleiters bei einem festen z die xz -Wände ($y = 0, y = b$) als Kondensatorflächen (nur $E_y \neq 0$) und (nur) in den yz -Wänden ($x = 0, x = a$) fließen Ströme in z -Richtung (weil nur $H_x \neq 0$, siehe auch unten). Uns interessiert natürlich jeweils die gesamte Spannung zwischen den Wänden und der gesamte Strom entlang der Wände, sodaß wir die Spannungen entlang x und die Ströme entlang y aufintegrieren werden. Wir können also nun einen praktischen Ausdruck für die Impedanz $Z_0 := \frac{U_{\text{gesamt}}}{I_{\text{gesamt}}}$ der H_{10} -Mode mit Hilfe der Definition von Spannung und Strom und den Maxwellgleichungen in Komponenten (auf klassische Weise) berechnen. Es gilt also zunächst:

$$U = \int_{\text{Weg in } xy\text{-Ebene}} E dl \quad \stackrel{H_{10}\text{-Mode}}{=} \int_0^b E_y dy$$

$$I = \int_{\text{Fläche in } xy\text{-Ebene}} j dA \quad \stackrel{\substack{\text{Maxwell-Glg.} \\ H_{10}\text{-Mode}}}{=} \int_0^a \int_{y\text{-Rand}} (\text{rot } H)_z dx dy \quad \stackrel{\substack{\text{Stokes} \\ (\text{rot } H)_z \neq 0 \text{ bei} \\ y = 0 \text{ oder } y = b}}{=} \int_0^a -H_x dx$$

und daher

$$Z_0 = \frac{U_{\text{gesamt}}}{I_{\text{gesamt}}} = \frac{\int_0^a U dx}{\int_0^b I dy} = \frac{\int_0^a \int_0^b E_y dy dx}{\int_0^b \int_0^a -H_x dx dy}$$

$$= \frac{\frac{\mu_0 c \lambda_c}{\lambda_0} \cdot H_0 \cdot \int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t) dy dx}{\frac{\lambda_c}{\lambda_L} \cdot H_0 \cdot \int_0^b \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \exp(ikz - i\omega t) dx dy} = \mu_0 c \cdot \frac{\lambda_L}{\lambda_0} \quad \stackrel{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}{\text{Def. von } \eta_0} \quad \eta_0 \cdot \frac{\lambda_L}{\lambda_0}.$$

Dieser konstante Wert ist jetzt nur für Wellen, die in eine Richtung laufen, ausgerechnet (deswegen auch Z_0 als Bezeichnung dieser Impedanz). Wenn am Ende eines Hohlleiters Reflexionen auftreten, werden aber – zumindest anteilig – stehende Wellen auftreten. Dies ist in Zeichnung 1.3 angedeutet, die wir diesmal aus der Anleitung eingescannt haben. Die explizite Berechnung der Impedanz sieht nun natürlich anders aus; wir modifizieren sie, indem wir das E_y in der Berechnung von U und das $j = (\text{rot } H)_z$ in der Berechnung von I als additive Überlagerung einlaufender und auslaufender Wellen

betrachten. Da bei der auslaufenden Welle die Fläche dA von j in der anderen Richtung durchstoßen wird als bei der einlaufenden, werden wir beim $(\text{rot } H)_z$ und entsprechend bei H_x die Überlagerung durch Subtraktion durchführen müssen, während bei E_y keine Laufrichtungs-Abhängigkeit vorliegt und daher einfach addiert wird. Es ergibt sich schließlich für die Impedanz:

$$\begin{aligned} Z_{\text{überlagert}} &= \frac{(H_{0,\text{ein}} \exp(ikz) + H_{0,\text{aus}} \exp(-ikz)) \cdot \frac{\mu_0 c \lambda_c}{\lambda_0} \cdot \exp(-i\omega t) \cdot \int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) dy dx}{(H_{0,\text{ein}} \exp(ikz) - H_{0,\text{aus}} \exp(-ikz)) \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda_L} \cdot \exp(-i\omega t) \cdot \int_0^b \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx dy} \\ &= Z_0 \cdot \frac{\exp(ikz) + \frac{H_{0,\text{aus}}}{H_{0,\text{ein}}} \exp(-ikz)}{\exp(ikz) - \frac{H_{0,\text{aus}}}{H_{0,\text{ein}}} \exp(-ikz)}. \quad (1.11) \end{aligned}$$

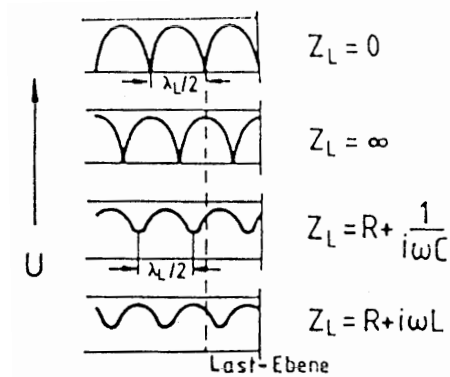


Abb. 1.3: Stehende Wellen bei verschiedenen Abschlußwiderständen

Diese Impedanz $Z := Z_{\text{überlagert}}$ ist also nun aufgrund des stehenden Welle-Anteils vom Ort z abhängig!

Weil sowohl E_y als auch H_x zu der gleichen Konstante $H_{0,\text{ein/aus}}$ proportional sein müssen, werden sie also bei der teilweisen Reflexion am Hohlleiterende gleichartig gedämpft, wie wir in der obigen Formel schon sehen können. Wir werden in der Praxis die E -Felder dadurch messen, daß wir die induzierten Wechselspannungen gleichrichten und mitteln (s. u.). Aus diesem Grunde können wir nun einen *Reflexionskoeffizienten* definieren:

$$\rho := \frac{H_{0,\text{aus}}}{H_{0,\text{ein}}} = \frac{U_{\text{rück}}}{U_{\text{hin}}}.$$

Der imaginäre Anteil des komplexen ρ beschreibt den Phasensprung bei der Reflexion, also die Auswirkung des

Blindanteils vom Abschlußwiderstand des Hohlleiters (vgl. nochmal mit Abbildung 1.3). Leider ist der Reflexionskoeffizient nicht praktisch meßbar; wie sollten wir meßtechnisch zwischen hinlaufenden und rücklaufenden Spannungen unterscheiden? Wir können nur das existierende Spannungsfeld aus teilweise stehender Welle, teilweise laufender Welle detektieren. Die Größen, die wir messen können, sind die maximalen Spannungen U_{max} und die minimalen Spannungen U_{min} . An den Stellen minimaler Spannungen erregt nur die laufende Welle das Meßsignal, an Stellen maximaler Spannung wird diese von der Summe aus stehender Welle und laufender Welle erzeugt. Daher definieren wir nun das leicht meßbare, sogenannte *Stehwellenverhältnis*, auch *Welligkeitsfaktor* genannt, über:

$$S := \frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{min}}} = \frac{|U_{\text{hin}}| + |U_{\text{rück}}|}{|U_{\text{hin}}| - |U_{\text{rück}}|}. \quad (1.12)$$

Für rein laufende Wellen ist $S = 1$, für rein stehende Wellen wird $S = \infty$. Aufgrund der Definitionen stehen der Reflexionskoeffizient und das Stehwellenverhältnis über die Beziehungen

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad \Leftrightarrow \quad |\rho| = \frac{S - 1}{S + 1}$$

in Verbindung.

Hilfsmittel zur Auswertung

Wir haben eben schon erwähnt, daß die Impedanz Z vom Ort z abhängt. Wir können nach Gleichung (1.11)

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1 + \rho \exp(-2ikz)}{1 - \rho \exp(-2ikz)} = \frac{1 + W}{1 - W}$$

schreiben, wobei $W := \rho \cdot \exp(-2ikz) = |\rho| \cdot \exp(i(\phi - 2kz))$ definiert ist mit ϕ als dem Phasensprung der Reflexion. Diese Größe W ist nun experimentell bestimmbar: $|\rho|$ können wir über das Stehwellenverhältnis S messen und den Phasenwinkel ϕ bestimmen wir über den Abstand l_0 des ersten Minimums der erzeugten stehenden Welle von dem reflektierenden Pfosten (bei uns im Experiment) und der Wellenlänge λ_L . Denn es gilt

$$\phi = 2kz_{\text{Pfosten}} + \phi_0$$

und

$$\phi - 2kz_{\text{Minimum}} = \pi,$$

womit wir

$$4\pi \cdot \frac{l_0}{\lambda_L} := 2k \cdot (z_{\text{Pfosten}} - z_{\text{Minimum}}) = \pi - \phi_0$$

erhalten. Damit ist ϕ durch $\frac{l_0}{\lambda_L}$ bestimmt.

Das sogenannte *Smith-Diagramm* (auch Leitungsdiagramm 2. Art genannt) bietet nun als Hilfsmittel die Möglichkeit, direkt aus der Messung von S und $\frac{l_0}{\lambda_L}$ die Größe $\frac{Z}{Z_0}$ zu bestimmen. Wir wollen dieses Diagramm nun beschreiben. Dazu definieren wir $u := \text{Re}(W)$ als Realteil und $v := \text{Im}(W)$ als Imaginärteil von W . Weiterhin kürzen wir mit $r := \text{Re}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)$ den Realteil und mit $x := \text{Im}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)$ den Imaginärteil von $\frac{Z}{Z_0}$ ab. Dann gilt nach den bisherigen Formeln:

$$r + ix = \frac{1 + (u + iv)}{1 - (u + iv)} = \frac{(1 + u + iv) \cdot (1 - u + iv)}{(1 - u)^2 + v^2} = \frac{(1 + iv)^2 - u^2}{(1 - u)^2 + v^2} = \frac{1 - (u^2 + v^2) + 2iv}{(1 - u)^2 + v^2}.$$

Also:

$$r = \frac{1 - (u^2 + v^2)}{(1 - u)^2 + v^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}.$$

Im Smith-Diagramm sind nun $r = \text{const}$ und $x = \text{const}$ -Linien eingezeichnet (vergleiche die Smith-Diagramme hinter der Auswertung). Beides sind Kreisarten, wie wir nun nachrechnen: Zunächst $r = \text{const}$:

$$\begin{aligned} rv^2 + r \cdot (1 - u)^2 &= 1 - (u^2 + v^2) \quad \Leftrightarrow \quad (1 + r)u^2 - 2ur + (1 + r)v^2 + r = 1 \\ \Leftrightarrow \quad u^2 - \frac{2ur}{1 + r} + v^2 + \frac{r}{1 + r} &= \frac{1}{1 + r} \quad \Leftrightarrow \quad \left(u - \frac{r}{1 + r}\right)^2 - \frac{r^2}{(1 + r)^2} + \frac{r}{1 + r} + v^2 = \frac{1}{1 + r} \\ \Leftrightarrow \quad \left(u - \frac{r}{1 + r}\right)^2 + v^2 &= \frac{(1 + r) + r^2 - r(1 + r)}{(1 + r)^2} = \frac{1}{(1 + r)^2}. \end{aligned}$$

Vom Kreis um 0 mit Radius 1 ziehen sich die Kreise immer mehr zusammen, bis der Mittelpunkt bei 1 gelandet ist und der Radius bei 0. Man sollte vielleicht noch kurz anmerken, daß die reelle Achse im Smith-Diagramm ungewöhnlicherweise nach unten zeigt.

Nun $x = \text{const}$:

$$\begin{aligned} xv^2 + x \cdot (1 - u)^2 &= 2v \quad \Leftrightarrow \quad (u - 1)^2 + v^2 - \frac{2v}{x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad (u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 &= \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen außerhalb des Smith-Diagramms, sie sind also offene Kreise. Sie berühren alle die reelle Achse.

Im Smith-Diagramm kann man nun den Punkt W direkt über Betrag und Phase einzeichnen (man braucht also nicht über u und v zu gehen), denn es sind Skalen für die gemessenen Größen S und $\frac{l_0}{\lambda_L}$ vorhanden. Man verfolgt nun die an dem so bestimmten Punkt vorhandenen Kreise zu den zugehörigen Skalen und hat damit die gewünschte normierte Impedanz $\frac{Z}{Z_0}$ bestimmt.

1.3 Technische Aspekte

1.3.1 Erzeugung von Mikrowellen: Impatt-Diode

Wir werden unsere Mikrowellen über eine *Impatt-Diode* oder *Lawinen-Laufzeit-Diode* erzeugen. Diese wollen wir hier nun beschreiben.

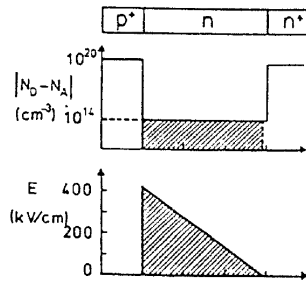


Abb. 1.4: Dotierungsprofil und elektrische Feldverteilung einer Impatt-Diode (eingescannt aus [Nimtz])

Eine Impatt-Diode ist eine in Sperrichtung betriebene Diode. Die Dotierung und der detailgetreue Aufbau der Diode ist nebenstehend abgebildet; die Dotierung ist so gestaltet, daß man eine große Verarmungszone erhält, in der die anliegende elektrische Feldstärke gleichmäßig abfällt. Die Feldstärke ist nun so groß gewählt, daß ein Durchbruch stattfinden kann (vgl. mit der Kennlinie in Abbildung 1.5), der im folgenden bei noch starkem elektrischen Feld durch Stoßionisation weitere Ladungsträger auslöst. Da dies lawinenartig geschieht, kommt der Anteil „Lawinen“ in den Namen der Diode (Impatt (Impact-Avalanche Transit-Time Diode) ist übrigens die Abkürzung des englischen Begriffs von Lawinenlaufzeit-Diode). Die Ionisation ist auf die unmittelbare Nähe des p^+ -Übergangs beschränkt. Die freien Ladungsträger driften nun durch die elektrische Feldstärke zum n^+ -Bereich der Diode und benötigen dafür eine bestimmte Zeit, die Laufzeit. Die

se Aufteilung in Lawinen- und Driftbereich des Verarmungsgebietes ist in Abbildung 1.6, die auch die einfache Schaltung der Diode zeigt, nochmal verdeutlicht.

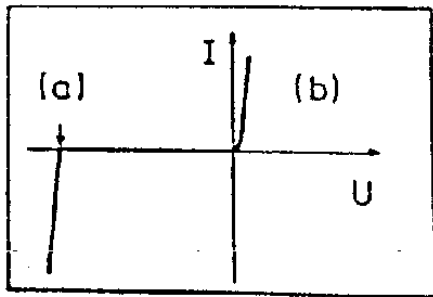


Abbildung 1.5: Kennlinie der Impatt-Diode (aus [Nimtz])

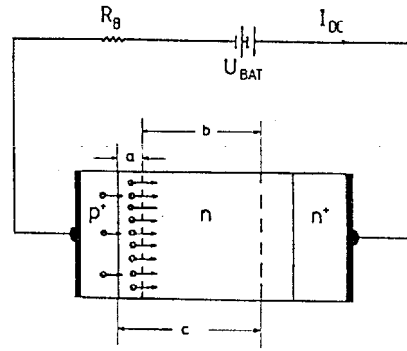


Abb. 1.6: Schaltung und Schema der Impatt-Diode: Bereich a): Lawinenbereich, Bereich b): Driftstrecke, Bereich c): gesamte Verarmungszone. (aus [Nimtz] eingescannt)

Bisher treten die Durchbrüche in unregelmäßiger Frequenz auf. Die dadurch auftretenden Stromstöße in der Schaltung erzeugen also zunächst nur ein Rauschen. Um die Diode ist nun aber ein *Mikrowellenresonator* (vgl. mit Abbildung 1.7) gebaut, das ist ein Hohlleiter mit Kurzschluß an einem Ende und einer Auskopplung am anderen Ende. Die Länge (die natürlich verstellbar ist) entspricht gerade einer halben Wellenlänge λ_L der gewünschten Frequenz. Diese Frequenz an Durchbrüchen wird durch den Resonator also besonders gefördert, alle anderen Frequenzen werden durch Nicht-Unterstützung unterdrückt. Es ist aber nicht nur so, daß die Diode ständig rauscht und nur die eine Frequenz in Resonanz ist und daher erzeugt wird. Die Mikrowellen koppeln auch direkt auf die Diode zurück. Und

zwar bewirken die Mikrowellen aufgrund ihres elektrischen Feldes, daß die an der Diode anliegende Spannung gerade mit der Mikrowellenfrequenz moduliert wird, was in Abbildung 1.8 skizziert ist. Bei den Maxima der Spannungen wächst nun die Zahl der Ladungsträger auf einen größten Wert an, denn dort wird der Durchbruch am wahrscheinlichsten. Aufgrund der endlichen Laufzeit wird das Maximum des so erzeugten Stromes aber erst dann auftreten, wenn die Spannung den nächsten Nulldurchgang durchläuft. Auch dies ist in Abbildung 1.8 zu erkennen.

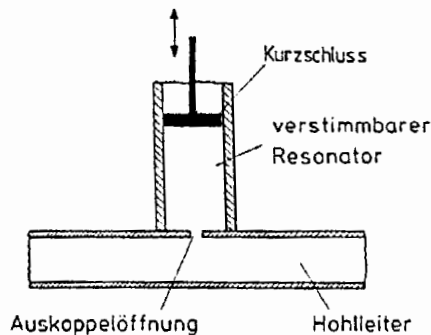


Abb. 1.7: Mikrowellen-Resonator (eingescannt aus [Nimtz])

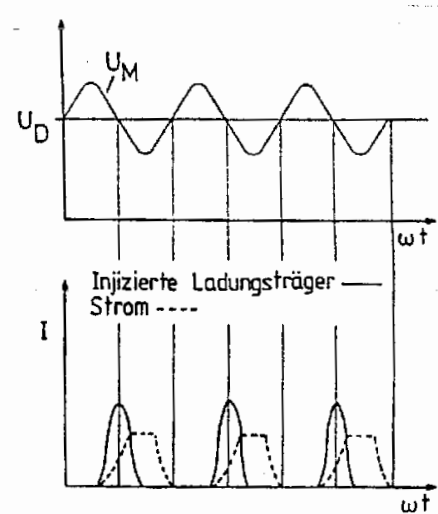


Abb. 1.8: Modulation der Diodenspannung und zeitliche Verschiebung des Stroms (eingescannt aus [Nimtz])

Was bedeutet jetzt die Verschiebung des Stroms gegenüber der Spannung aufgrund der Laufzeit? Der Strom im äußeren Kreis ist erst dann positiv, wenn die Wechselspannung an der Diode gerade negativ geworden ist. An diesen Stellen besitzt die Diode einen negativen Widerstand. Da dieser negative Widerstand nur an den Stellen der Strommaxima auftritt (ansonsten ist er ja positiv), nennt man ein solches Phänomen einen *negativen differentiellen Widerstand* ndW . Dieser Effekt ist nun sehr bedeutend für die Mikrowellenerzeugung; er erklärt uns nämlich, warum überhaupt Mikrowellen von der Diode in den Resonator ausgekoppelt werden (bisher wissen wir nur, warum mit der gewünschten Frequenz, und wie die Rückkopplung aussieht). Dadurch, daß nämlich die äußere Spannung plötzlich die Elektronen in die andere Richtung bewegen möchten, als sie gerade driften (und das beschreibt der ndW ja gerade), werden diese gebremst. Beschleunigte Ladungsträger strahlen aber gerade elektromagnetische Wellen ab, unsere Mikrowellen.

1.3.2 Mikrowellen-Bauteile

Wir wollen nun die Bauteile beschreiben, mit denen wir unsere Mikrowellen gezielt beeinflussen können. Alle hier abgebildeten Bilder sind aus [Nimtz] eingescannt.

Kurzschlüsse

Hierbei handelt es sich schlicht um eine abschließende metallische Wand. Hierdurch wird die Mikrowelle vollständig reflektiert, also $\rho = 1$, $S = \infty$. Ein verstellbarer *Kurzschluß* ist beim Mikrowellen-Resonator in Abbildung 1.7 eingezeichnet.

Der Absorber

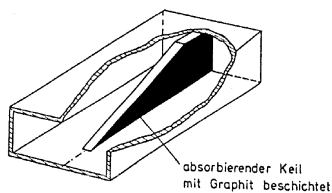


Abb. 1.9: Absorber

setzt, daß die Keilflächen parallel zu der elektrischen Feldstärke der H_{10} -Mode stehen. So werden Ströme in der Graphitschicht induziert und daher die elektromagnetische Leistung in Wärme umgewandelt. In der Praxis erreicht man mit Keillängen von drei Wellenlängen Stehwellenverhältnisse von $S \leq 1,02$.

Der Einweg-Hohlleiter

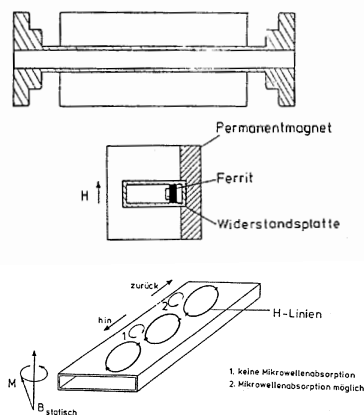


Abb. 1.10: Einweghohlleiter

andere Richtung bleibt von diesem Effekt unbeeinflusst.

Wir erwähnen nun noch ein paar technische Werte für praktisch genutzte Einweg-Hohlleiter. Bei Frequenzen zwischen 8,5 und 9,6 GHz beträgt die Rückwärtsdämpfung minimal 30 dB (Faktor 1000) und für die Vorwärtsdämpfung maximal 0,5 dB (Faktor 1,12). Einweg-Hohlleiter werden sehr oft (so auch bei uns) zum rückkopplungsfreien Anschluß von Generatoren an das Meßsystem eingesetzt (sonst gäbe es Leistungs- und Frequenzschwankungen).

Das Dämpfungsglied

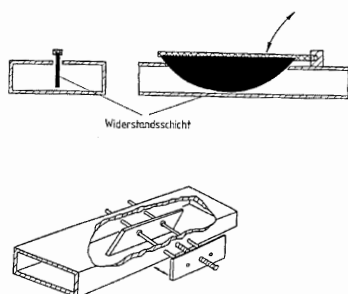


Abb. 1.11: Dämpfungsglieder

Ein andere Art des Dämpfungsgliedes ist der sogenannte *Fähnchen-Abschwächer*. Hier kann man die Widerstandsschicht zwischen dem Minimum der Feldstärke E , also dem Rand des Hohlleiters, und deren Maximum in der Mitte

Häufig möchte man in Experimenten nur laufende Wellen oder Reflexionen an gezielten Hindernissen untersuchen. Dann muß man gewährleisten, daß der Hohlleiter unendlich lang wirkt, der Abschlußwiderstand also genau so groß wie der Wellenwiderstand der abzuschließenden Leitung ist. Man erreicht dies in der Praxis durch einen stetig anwachsenden *Absorber*. Ein absorbierender Keil – meist aus Graphit auf einem Plastik-, Keramik- oder Asbestträger hergestellt – wird so in den Hohlleiter eingesetzt,

Bei einem *Einweg-Hohlleiter* soll die Übertragung von Mikrowellen in eine Richtung erlaubt sein, während sie in umgekehrter Richtung verhindert werden soll. Um dies zu erreichen, ist am Hohlleiterring eine Ferritscheibe eingesetzt, welche sich in einem statischen Magnetfeld eines Permanentmagneten befindet. Die magnetischen Momente des Ferriten führen daher nun eine Larmor-Präzession um das permanente Magnetfeld aus.

Ein Beobachter der elektromagnetischen Wellen im Hohlleiter nimmt je nach Ausbreitungsrichtung der Welle entweder ein rechts- oder ein linkszirkulierendes H -Feld wahr. Zirkuliert das H -Feld in der gleichen Richtung wie die magnetischen Momente im Ferrit, so wird die Welle absorbiert. Daß dies bei allen Frequenzen und nicht nur bei der Larmorfrequenz gelingt, erreicht man durch eine dämpfende Platte. Läuft also die Welle in die Richtung, in der die H -Zirkulation mit der Larmor-Zirkulation übereinstimmt, findet keine Mikrowellen-Ausbreitung statt. Die

Mit *Dämpfungsgliedern* soll die Mikrowellenleistung zu einem definierten Teil absorbiert werden. Man erreicht dies, indem man parallel der elektrischen Feldstärke der H_{10} -Mode eine Widerstandsschicht anbringt. Die Dämpfungsstärke ist durch die Länge und die Lage dieser Schicht bestimmt. Eine mögliche Bauart eines Dämpfungsgliedes ist das *Schwert*. Hierbei wird in der Mitte, also bei maximaler Feldstärke E , eine absorbierende Platte mehr oder weniger tief eingetaucht. Die Platte ist schwertförmig, damit keine Reflexionen an dieser Störung auftreten.

Ein andere Art des Dämpfungsgliedes ist der sogenannte *Fähnchen-Abschwächer*. Hier kann man die Widerstandsschicht zwischen dem Minimum der Feldstärke E , also dem Rand des Hohlleiters, und deren Maximum in der Mitte

des Hohlleiters hin- und herbewegen. Die keilförmige Form sorgt erneut für eine (nahezu) reflexionsfreie Anpassung. Die Widerstandsschichten sind jeweils wie die Absorberkeile aufgebaut.

Der Phasenschieber

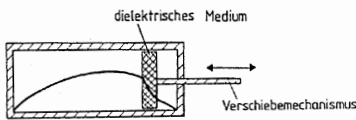


Abb. 1.12: Phasenschieber

Phasenschieber sind im Aufbau den Dämpfungsgliedern ähnlich. Statt eines absorbierenden Mediums wird ein Stoff eingeführt, der eine große Dielektrizitätskonstante (oder magnetische Permeabilität) besitzt. Hierdurch wird die Hohlleiterwellenlänge verkürzt (s. u.). Das hat zur Folge, daß sich die effektive Länge des Hohlleiters und damit die Phase der Welle ändert. Die Steuerung der Stärke der Phasenverschiebung geht analog der Steuerung der Dämpfung bei Dämpfungsgliedern.

Der Hornstrahler

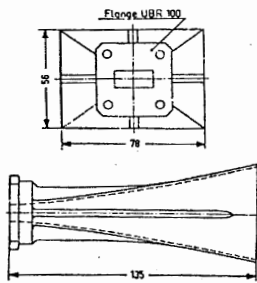


Abb. 1.13: Hornstrahler

Hornstrahler dienen dazu, elektromagnetische Wellen aus dem Hohlleiter reflexionsfrei an den freien Raum anzupassen und auszukoppeln. Dazu sind die Hörner exponentiell geformt. Mehr ist hier eigentlich nicht zu sagen.

Dioden als Detektoren

Als *Detektoren* benutzt man *Dioden*. Diese koppeln an das elektrische Feld E . Schließt man nun den Stromkreis, indem man einen Widerstand an die Diode anschließt, so wird die durch E anliegende Spannung einen Strom erzeugen, den man über den Spannungsabfall an dem Widerstand – z. B. auf einem Oszilloskop – messen kann. Da die Strom-Spannungs-Kennlinie quadratisch verläuft (in Abbildung 1.5 leider nicht sehr deutlich zu erkennen), mißt man direkt die Leistung der Mikrowelle.

Der Stehwellendetektor

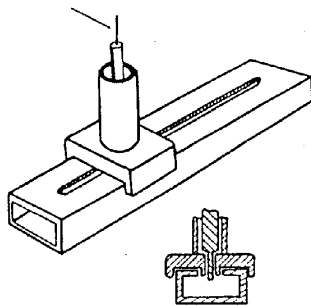


Abb. 1.14: Stehwellendetektor

Mit einem *Stehwellendetektor* kann man die Feldverteilung von Mikrowellen ortsabhängig (entlang der Ausbreitungsrichtung) abtasten. Dies geschieht mit einer längs der Leitung verschiebbaren Sonde, die durch einen Schlitz in den Leiter eintaucht. Für die genaue Ablesbarkeit der Sondenposition sorgt eine Noniuskala. Die Sonde koppelt die entnommene Mikrowelle an eine Diode. Diese richtet das entstandene Signal gleich. Mit einem Oszilloskop kann man nun die bei Sperrung an der Diode abfallende Spannung direkt messen (ein paar elektronische Spielereien schaden natürlich auch nicht). Im Gegensatz zum Diodendetektor messen wir hier also nicht die Leistung, sondern das Feld E , bzw. die zugehörige Spannung U .

1.4 Anwendungen der Mikrowellen

In diesem Abschnitt wollen wir nun umfassend die Theorie zu den Phänomenen und die Versuchsaufbauten zu deren Untersuchung betrachten, bei denen wir beispielhaft die Mikrowellentechnik anwenden wollen.

1.4.1 Polarisierbarkeit und Dielektrizitätskonstante

Wir wollen in unserem Versuch die *Dielektrizitätskonstanten* DK einiger Stoffe auf zwei verschiedene Arten messen. Wir betrachten daher zunächst die Frequenzabhängigkeit der Polarisierung bzw. der Dielektrizitätskonstanten von Materialien.

Theorie

Zunächst sagen wir nochmal, was die Dielektrizitätskonstante bzw. die *Suszeptibilität* ist. *Klassisch* gilt allgemein mit der *Polarisation* P :

$$D = \varepsilon_0 E + P .$$

Bei kleinen Feldstärken und für Stoffe, die nicht zufällig Ferroelektrika, aber isotrop sind², ist die Polarisierung der Feldstärke proportional,

$$P = \varepsilon_0 \chi \cdot E ,$$

wobei das χ die *elektrische Suszeptibilität* ist. Aus diesem Grunde kann man über die Definition $\varepsilon := 1 + \chi$ die *Permeabilität* bzw. *Dielektrizitätskonstante* definieren; es gilt dann natürlich

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot E .$$

Im *äußeren Kalkül* modifizieren wir unsere metrikabhängige Vakuumgleichung (1.2) über eine zusätzliche Zwei-Form $k := P + M \wedge dt$ zu einer metrikabhängigen Materialgleichung. Es gilt dann also:

$$G = * \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} F + k .$$

Über die übliche Raum-Zeit-Blätterung erhalten wir somit für den Ortsanteil (man beachte dabei $x^0 = ct$ und $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}$):

$$D = * \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (E \wedge dt) + P = * \varepsilon_0 (E \wedge dx^0) + P .$$

Unter den gleichen Voraussetzungen wie in der klassischen Betrachtung kann man $P = * \varepsilon_0 \chi (E \wedge dx^0)$ setzen. Mit der Definition für die DK von oben ergibt sich dann also

$$D = * \varepsilon \varepsilon_0 (E \wedge dx^0) . \tag{1.13}$$

Wir machen uns nun klar, über welche Effekte die Polarisierung P von der Feldstärke E abhängt, damit wir die Wellenlängenabhängigkeit dieser Effekte abschätzen können. Es gibt hierbei drei wesentliche Effekte, die für uns von Interesse sind:

- Dipolpolarisation,
- Ionenpolarisation und
- Elektronenpolarisation.

²Mit Ferroelektrika beschäftigen wir uns genauer in Versuch [Fest-16].

Bei der *Elektronenpolarisation* verzerrt sich die Elektronenhülle gegenüber der Kernlage bei einer angelegten elektrischen Feldstärke. Das induzierte Dipolmoment, was hierdurch effektiv entsteht, ist dann natürlich die Polarisation. Da die Coulombkräfte dieser Verzerrung entgegenwirken, kann man diese Verzerrung über ein näherungsweise harmonisches Potential beschreiben. Dieses hat dann natürlich eine Resonanzfrequenz ω_0 . Unterhalb dieser Resonanzfrequenz kann die Polarisation bzw. die Verzerrung der angelegten oszillierenden Feldstärke folgen. Bei größer werdender Frequenz erreicht die Polarisation größere Werte, da in der Nähe der Resonanzfrequenz die Amplituden, in unserem Fall also die Verzerrungen, wachsen. Die Suszeptibilität χ und die DK ε steigen also stark an. Sie durchlaufen ein Maximum; da gleichzeitig aber die Polarisation immer mehr der Feldstärke hinterherhinkt (Phasenabhängigkeit), bis bei der Resonanzfrequenz die Polarisation um $\frac{\pi}{2}$ nachläuft (sodaß sie keine Auswirkungen nach außen hat), ist dann $\chi' = 0$ bzw. $\varepsilon' = 1$. Bei Frequenzen größer als die Resonanzfrequenz wächst die Phasenverschiebung weiter an, sodaß die Polarisation der Feldstärke jetzt sogar entgegengerichtet ist. Da bei sehr großen Frequenzen die Verzerrung gar nicht mehr mit der Oszillation der Feldstärke mitkommt, eine Verzerrung also gar nicht mehr stattfindet, durchläuft die DK ein Minimum. Bei der Suszeptibilität liegt das Minimum auf jeden Fall im Negativen, aber auch bei der DK ist dies häufig der Fall. Das eben beschriebene Verhalten kann man mittels einer komplexen DK bzw. Suszeptibilität $\chi = \chi' + i\chi''$ beschreiben, wobei wir nur den direkt meßbaren reellen Teil χ' messen wollen, da der imaginäre Teil dämpfend wirkt (in Wellengleichung ε_0 durch $i\varepsilon_0\varepsilon''$ ersetzen). Graphisch lassen sich diese Anteile von χ in Abbildung 1.15 (wobei $\tau = \frac{1}{\omega_0}$) darstellen. Empirisch ergibt sich, daß die Resonanzfrequenz der Elektronenpolarisation meist im ultravioletten Bereich liegt.

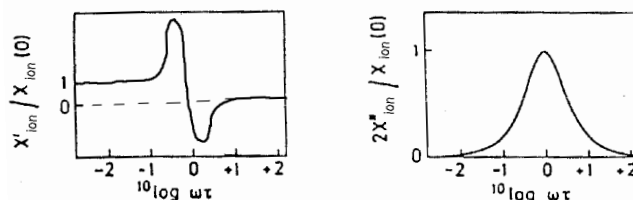


Abb. 1.15: Resonanz in der Frequenzabhängigkeit der DK
(Bild basierend auf einem eingescanntem Bild)

Die *Ionenpolarisation* folgt dem gleichen Prinzip. In diesem Fall verschieben sich die Ionen eines Ionengitters aufgrund der angelegten oszillierenden Feldstärke. Die ganze Beschreibung der Elektronenpolarisation gilt analog hier, einschließlich Abbildung 1.15. Der einzige Unterschied neben der Art des stattfindenden Prozesses ist empirischer Natur: Die Resonanzfrequenz liegt nun meist im infraroten Bereich. Dies erklärt sich durch die größeren Massen der Ionen im Vergleich zu den Elektronen und der daher niedrigeren Resonanzfrequenz.

Nun beschreiben wir noch die *Dipolpolarisation*. Hierbei handelt es sich um einen qualitativ ganz anderen Effekt. Gewisse Moleküle, z. B. Wasser, besitzen ein Dipolmoment. In einer Flüssigkeit oder einem Gas sind die einzelnen Dipole statistisch verteilt; gemittelt ist das Gesamtdipolmoment Null. Bei einer angelegten Feldstärke richten sich nun die Permanentdipole aus, sodaß eine Polarisation als Reaktion entsteht. Auch bei Festkörpern treten diese Effekte auf, auch wenn man hier weniger Beispiele findet. Da bei der eben beschriebenen Orientierung keine rücktreibende Kraft existiert, verhält sich die Suszeptibilität gänzlich anders als bei Resonanzübergängen. Die Ausrichtung der Dipole braucht eine gewisse kurze Zeit, die *Relaxationszeit* genannt wird, sodaß bei hohen Frequenzen die Dipolmomente der Feldstärke nicht mehr folgen können. Wir wollen dies nun genauer betrachten.

Dazu stellen wir eine Formel für die Änderung des Dipolmoments auf. Diese Änderung ist umso größer, je größer die Abweichung einer ideal mitoszillierenden Polarisation von der tatsächlichen ist und je kleiner

die Relaxationszeit τ ist, also:

$$\frac{dP(\omega)}{dt} = \frac{P(0) \exp(-i\omega t) - P(\omega)}{\tau}$$

Da ja auch $P(\omega)$ mit $\exp(-i\omega t)$ (allerdings phasenverschoben) oszilliert, ergibt sich

$$-i\omega \varepsilon_0 \chi(\omega) E = \frac{\varepsilon_0}{\tau} \cdot E \cdot (\chi(0) - \chi(\omega)) \iff \chi(\omega) = \frac{\chi(0)}{1 - i\omega\tau}$$

Wenn wir nun erneut die Suszeptibilität $\chi(\omega)$ als komplexe Größe betrachten (der reelle Anteil ist wieder die meßbare Suszeptibilität bzw. DK, der imaginäre Anteil entspricht wieder der Dämpfung), so ergeben sich die sogenannten *Debye-Formeln*:

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \cdot \chi(0) \quad \text{und} \quad \chi''(\omega) = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \cdot \chi(0)$$

Das Aussehen des Relaxationsübergangs, der durch diese Formeln beschrieben ist, haben wir in Abbildung 1.16 dargestellt. Man erkennt, daß bei niedrigen Frequenzen die Permanentdipole ohne Probleme folgen können. Bei $\omega \approx \frac{1}{\tau}$ laufen die Permanentdipole um $\frac{\pi}{2}$ nach. Und schließlich können die Permanentdipole bei hohen Frequenzen nicht mehr folgen, sodaß sie nicht mehr zur Polarisation beitragen. Solche Übergänge treten hauptsächlich bei Mikrowellenfrequenzen auf.

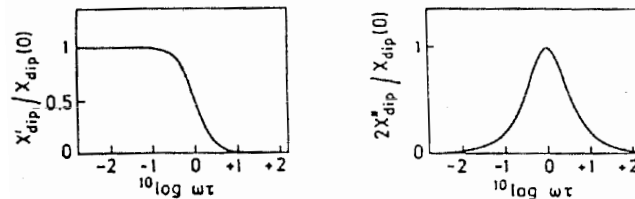


Abb. 1.16: Relaxation in der Frequenzabhängigkeit der DK (Bild eingescannt aus [Nimtz])

Wir wollen all diese Übergänge in einem Bild schematisch zusammenführen. Es ist der Realteil der Dielektrizitätskonstante ε dargestellt:

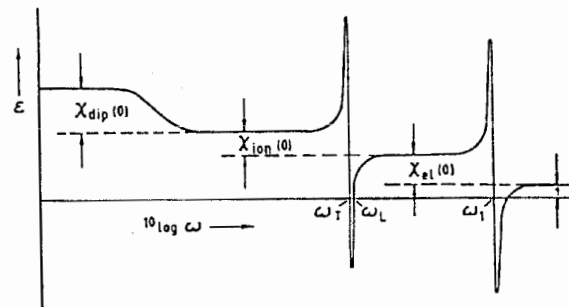


Abb. 1.17: Frequenzabhängigkeit der DK schematisch (Bild eingescannt aus [Nimtz])

DK-Messung im Hohlleiter

Nun wollen wir das erste Verfahren vorstellen, mit dem wir die Dielektrizitätskonstante bestimmen werden. Wir gehen davon aus, daß die magnetische Suszeptibilität verschwindet und die elektrische

Suszeptibilität proportional zur elektrischen Feldstärke ist (vgl. obige Voraussetzungen); in diesem Fall können wir unsere metrikabhängige Materialgleichung auch

$$G = * \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0}} F$$

schreiben. Nur durch diese Gleichung und die modifizierte Lichtgeschwindigkeit

$$c_\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

ergeben sich Modifikationen der in der allgemeinen Elektrodynamik bestimmten Gleichungen. Man muß natürlich beachten, daß sich hierdurch auch Größen ändern, die von der Lichtgeschwindigkeit abhängen. Die Frequenz, die ja mit der Energie verknüpft ist, bleibt auch in Materialien unverändert, daher ändert sich die Wellenlänge λ_0 (und entsprechend auch die Wellenzahl k) und es ergibt sich:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Die Wellenlänge λ_c bleibt als Geometrie-Konstante des Hohlleiters natürlich unverändert, hingegen wird auch die Wellenlänge λ_L beeinflusst; für diese gilt

$$\lambda_{L_\varepsilon} = \frac{\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon} \lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}. \quad (1.14)$$

Auch unser Wellenwiderstand (der auch eine Impedanz ist, was wir hier aber nicht explizit zeigen) wird modifiziert: Aus $Z_{\text{frei}} := \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ wird:

$$Z_{\varepsilon_{\text{frei}}} := \eta_\varepsilon = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Und wie modifiziert sich unser Z_0 des Hohlleiters? Statt $Z_0 = \eta_0 \cdot \frac{\lambda_L}{\lambda_0}$ gilt nun

$$Z_\varepsilon = \eta_\varepsilon \cdot \frac{\lambda_{L_\varepsilon}}{\lambda_\varepsilon}.$$

Somit:

$$\frac{Z_0}{Z_\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{\lambda_L}{\lambda_0} \frac{\lambda_\varepsilon}{\lambda_{L_\varepsilon}} = \frac{\lambda_L}{\lambda_{L_\varepsilon}}. \quad (1.15)$$

Wir füllen nun den Hohlleiter mit einem Dielektrikum der Breite L und schließen ihn direkt dahinter mit einem Kurzschluß ab. Aufgrund der Formel (1.11) (geeignet für Dielektrika modifiziert) gilt zunächst für die Impedanz an der Stelle L :

$$Z = Z_\varepsilon \cdot \frac{\exp(ikL) + \rho \exp(-ikL)}{\exp(ikL) - \rho \exp(-ikL)},$$

wobei $k = \frac{2\pi}{\lambda_{L_\varepsilon}}$. Da wir mit einem Kurzschluß abschließen, gilt weiterhin $\rho = -1$, sodaß sich in der letzten Formel die Darstellung des Tangens ergibt:

$$Z = Z_\varepsilon \cdot \tan\left(\frac{2\pi L}{\lambda_{L_\varepsilon}}\right).$$

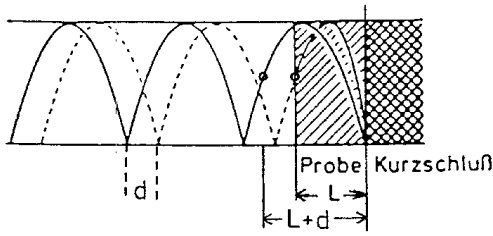


Abb. 1.18: DK-Messung in einem vollständig gefüllten Hohlleiter (aus der Anleitung eingescannt)

Ohne die dielektrische Probe verschiebt sich (durch die veränderte Wellenlänge) die gleiche Impedanz an die Stelle $d + L$, was man sehr schön in Abbildung 1.18 erkennen kann. Also gilt auch:

$$Z = Z_0 \cdot \tan \left(\frac{2\pi(d+L)}{\lambda_L} \right).$$

Wir setzen die beiden letzten Gleichungen gleich

$$Z_e \cdot \tan \left(\frac{2\pi L}{\lambda_{L_e}} \right) = Z_0 \cdot \tan \left(\frac{2\pi(d+L)}{\lambda_L} \right)$$

und setzen (1.15) ein, um schließlich die entscheidende Bestimmungsformel zu erhalten:

$$\frac{\tan \frac{2\pi L}{\lambda_{L_e}}}{\frac{2\pi L}{\lambda_{L_e}}} = \frac{\tan \frac{2\pi(d+L)}{\lambda_L}}{\frac{2\pi L}{\lambda_L}}. \quad (1.16)$$

DK-Messung im freien Raum

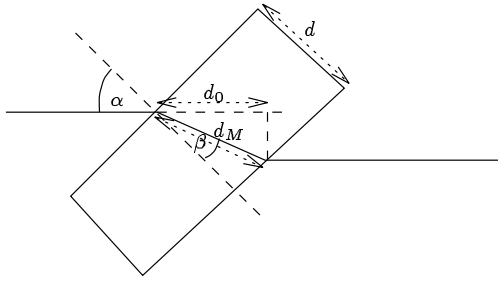


Abb. 1.19: DK-Messung im freien Raum

Wir kommen nun zur zweiten Meßmethode der Dielektrizitätskonstanten. Im freien Raum wird die Probe der Dicke d unter einem Winkel α aufgestellt (bei uns wird dies 45° sein). Nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz wird dann der Strahl in der Probe in einem Winkel β zum Lot gebrochen werden: Es gilt:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\epsilon}}, \quad \text{also:} \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\epsilon}}.$$

Die Weglänge, die der Strahl in der Probe zurücklegt, berechnet sich zu

$$d_M = \frac{d}{\cos \beta}.$$

Für die Weglänge, die der Strahl ohne Probe zurücklegt (wenn wir die Probe wieder wegnehmen), gilt:

$$d_0 = d_M \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Die relative Phasendifferenz der beiden Strahlwege wird nun durch die Differenz der Weglängen bezogen auf die jeweiligen Wellenlängen berechnet:

$$\frac{\psi}{2\pi} = \frac{d_M}{\lambda_e} - \frac{d_0}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} \cdot (\sqrt{\epsilon} d_M - d_0).$$

Wir setzen jetzt alle bisherigen Beziehungen ineinander ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\psi \lambda_0}{2\pi} &= \frac{\sqrt{\epsilon} d}{\cos \beta} - d_M \cos(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon d}{\sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha}} - \frac{d \cdot (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{\cos \beta} \\ &= \frac{\epsilon d}{\sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha}} - d \cos \alpha - \frac{d \sin^2 \alpha}{\sqrt{\epsilon} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\epsilon}}} = d \cdot \left(\frac{\epsilon - \sin^2 \alpha}{\sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha}} - \cos \alpha \right) \\ &= d \cdot \left(\sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Dies kann man einfach nach ε auflösen und erhält die Beziehung

$$\varepsilon = \left(\frac{\psi \lambda_0}{2\pi d} + \cos \alpha \right)^2 + \sin^2 \alpha . \quad (1.17)$$

1.4.2 Doppler-Effekt

Wir wollen nun noch eine Radarfalle nachbauen. Dazu benutzen wir ein Spielzeugauto, dessen Geschwindigkeit wir einmal herkömmlich mit Längen- und Zeitmessung bestimmen und zum anderen mittels Mikrowellen. Dies wollen wir nun genauer betrachten.

Theorie

Wir senden aus einem Horn Mikrowellen mit einer Kreisfrequenz ω aus (mit einem zweiten Horn empfangen wir die reflektierte Strahlung). Das Auto bewegt sich nun mit einer Geschwindigkeit v auf das Horn zu. Wir stellen uns zuerst einmal die Frage, mit welcher Kreisfrequenz ein mitfahrender Beobachter die Mikrowellen detektiert. Mit dieser Frequenz werden nämlich die Elektronen in der Metallplatte, die am Auto befestigt ist, angeregt und die reflektierte Strahlung wird mit dieser Frequenz ausgesendet.

Dazu stellen wir zunächst fest, daß in jedem Bezugssystem die Phase $\phi = \underline{k}' \underline{x}' - \omega' t' = \underline{k} \underline{x} - \omega t$ konstant sein muß, da sie ein Skalar ist (vergleiche hierzu auch [Rel1]). Mit den bekannten Transformationen (und den üblichen Abkürzungen $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ und $\underline{\beta} := \frac{\underline{v}}{c}$)

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \cdot \left(t - \frac{\underline{\beta}}{c} \underline{x} \right) , \\ \underline{x}' &= \gamma \cdot (\underline{x} - \underline{v} t) \end{aligned}$$

ergibt sich somit die Bedingung

$$\begin{aligned} \omega' \cdot \gamma \cdot \left(t - \frac{\underline{\beta}}{c} \underline{x} \right) - \underline{k}' \cdot \gamma \cdot (\underline{x} - \underline{v} t) &\stackrel{!}{=} \omega t - \underline{k} \underline{x} \\ \Leftrightarrow (\gamma \omega' + \gamma \underline{k}' \underline{v} - \omega) \cdot t &= (\gamma \omega' \cdot \frac{v}{c^2} + \gamma \underline{k}' - \underline{k}) \cdot \underline{x} . \end{aligned}$$

Da dies für alle x und t gelten muß, können wir die Koeffizienten jeweils gleich Null setzen und das entstehende lineare Gleichungssystem nach ω' und \underline{k}' auflösen. Es ergeben sich die Transformationen

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma \cdot (\omega - \underline{v} \underline{k}) , \\ \underline{k}' &= \gamma \cdot \left(\underline{k} - \frac{\underline{\beta}}{c} \omega \right) . \end{aligned}$$

Mit $|k| = \frac{\omega}{c}$ für elektromagnetische Wellen ergibt sich somit die Transformation der Frequenz zu

$$\omega' = \gamma \cdot \omega \cdot (1 - \beta \cdot \cos(\vartheta)) ,$$

wobei ϑ der Winkel zwischen \underline{v} und \underline{k} ist. Dies ist der *relativistische Doppler-Effekt*.

Bei uns ist die Geschwindigkeit der Wellenausbreitungsrichtung entgegengesetzt. Daher gilt:

$$\omega' = \gamma \cdot \omega \cdot (1 + \beta) .$$

Wir wissen jetzt also, welche Frequenz die vom Auto reflektierte Strahlung besitzt. Wir können nun das Auto als ruhend ansehen; dann bewegt sich das detektierende zweite Horn mit v auf das Auto zu. Wir haben somit die gleiche physikalische Situation vorliegen wie eben betrachtet, sodaß die empfangene Strahlung die Kreisfrequenz

$$\omega'' = \gamma \cdot \omega' \cdot (1 + \beta) .$$

besitzen wird. Wenn wir nun unsere beiden Formeln der Frequenztransformationen ineinander einsetzen, erhalten wir:

$$\omega'' = \gamma^2 \cdot \omega \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 = \omega \cdot \frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \omega \cdot \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}.$$

Da wir in unserem Versuch (höchstwahrscheinlich ...) nur sehr kleine Geschwindigkeiten gegenüber c erreichen werden, taylor-nähern wir die letzte Formel:

$$\omega'' = \omega \cdot \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = \omega \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{v}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right) = \omega \cdot \left(1 + 2\frac{v}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right).$$

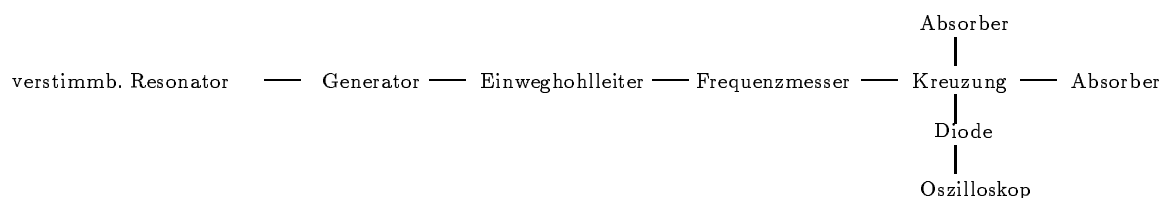
An der Stelle, an der sich die Meßdiode befindet, interferieren nun die beiden Frequenzen ω und ω'' miteinander. Da die Abweichungen nicht zu groß sind, entsteht eine Schwebung. Die Frequenz einer Schwebung $\nu_f = \frac{\omega_f}{2\pi}$ beschreibt die Anzahl der Knoten der Amplituden in einer bestimmten Zeit und ist daher direkt am Oszilloskop ablesbar. Für die Schwebungsfrequenz, die auch manchmal Zwischenfrequenz genannt wird, gilt (mit $f_0 := \frac{\omega}{2\pi}$):

$$\nu_f = \frac{1}{2\pi} \cdot (\omega'' - \omega) = 2f_0 \cdot \frac{v}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (1.18)$$

2. Auswertung

2.1 Kennlinie der Impatt-Diode

Im ersten Teil dieses Versuches haben wir die abgestrahlte Leistung der Impatt-Diode in Abhängigkeit von der eingestellten Sendefrequenz gemessen. Wir nutzten folgenden Versuchsaufbau:



Unsere Meßergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt. Dabei bezeichnet ν die eingestellte Frequenz, s die Einstellung des Kurzschlußschiebers und L die gemessene Sendeleistung.

ν [MHz]	s [mm]	L [mV]	ν [MHz]	s [mm]	L [mV]
± 2	$\pm 0,005$	$\pm 0,8$	± 2	$\pm 0,005$	$\pm 0,8$
10000	4,57	9,6	9450	6,96	6,8
9975	4,6	12	9425	7,10	4,8
9950	4,75	10	9400	7,30	0,2
9925	4,8	9,6	9375	7,32	6,4
9900	4,96	7,6	9350	7,47	5,2
9875	5,06	7,6	9325	7,61	4,4
9850	5,16	8,0	9300	7,75	3,2
9825	5,27	7,2	9275	7,89	2,8
9800	5,38	7,2	9250	8,02	2,4
9775	5,51	6,6	9225	8,17	2,0
9750	5,66	0,4	9200	8,30	1,6
9725		0	9175	8,45	1,0
9700	5,74	4,4	9150	8,59	0,6
9675	5,88	6,4	9125	8,75	0,4
9650	5,99	7,6	9100	8,91	0,2
9625	6,11	8,4	9075	9,06	0,2
9600	6,23	8,0	9050	9,23	0,2
9575	6,35	8,8	9025	9,38	0,4
9550	6,47	9,6	9000	9,55	0,8
9525	6,59	10,4	8975	9,72	1,2
9500	6,70	10,0	8950	9,89	2,0
9475	6,83	8,8	8925	10,05	2,0

Die graphische Darstellung dieser Meßdaten ergibt die Kennlinie der Impatt-Diode. Sie ist in Abbildung 2.1 gegeben.

Für den weiteren Versuchsverlauf haben wir die Impatt-Diode auf die Sendefrequenz mit der maximalen abgestrahlten Leistung eingestellt. Diese Frequenz lag bei 9515 MHz.

Kennlinie der Impatt-Diode

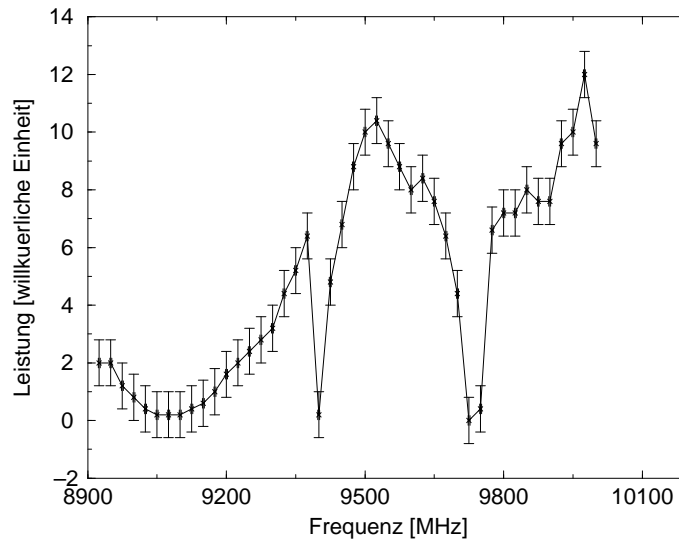
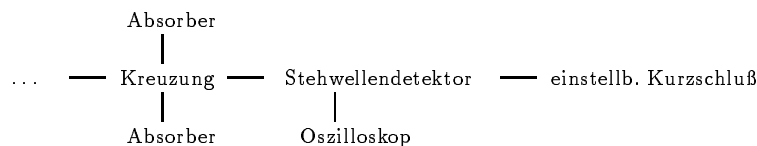


Abbildung 2.1: Kennlinie der Impatt-Diode

2.2 Wellenlänge

Durch Ausmessung des Stehwellenfeldes ist es uns möglich, die Wellenlänge im Hohlleiter zu bestimmen. Dazu bauten wir folgenden Versuchsaufbau auf:



Wir maßen die Minima an folgenden Stellen:

Minimaposition $\pm 0,1$ [mm]	47,2	69,1	90,85	112,9
$\lambda_L/2 \pm 0,14$ [mm]	21,9	21,75	22,05	

Durch Mittelwertbildung erhalten wir für die Wellenlänge im Hohlleiter

$$\lambda_L = 43,8 \pm 0,30 \text{ mm} .$$

Soweit zur explizit durchgeführten Messung. Wie liegen wir nun aber mit dem gefundenen Wert für λ_L ? Durch Vergleich mit dem theoretischen Wert, der sich aus der verwendeten Frequenz und den Hohlleiterabmessungen ergibt, können wir für unseren Meßwert eine Qualitätsaussage machen.

Aus der Vorbereitung kennen wir schon Gleichung (1.8): $\lambda_L = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_c})^2}}$. Mit den Werten

$$\lambda_0 = 31,5074 \pm 0,0003 \text{ mm}$$

für die Wellenlänge im freien Raum und mit

$$\lambda_c = 2a = 45,72 \text{ mm}$$

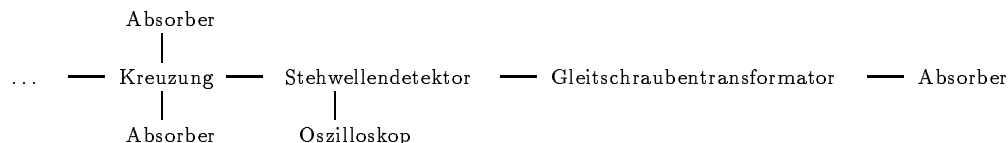
als *Cut-Off-Wellenlänge* (der Wert a für die Breite im Hohlleiter stammt aus der Versuchsanleitung) erhalten wir den theoretischen Wert

$$\lambda_L = 43,4806 \pm 0,0009 \text{ mm} .$$

Wir liegen mit unserem gemessenen Wert gerade so am theoretischen Wert. Die Abweichung beträgt 0,74 %. Zwar könnte die Übereinstimmung noch besser sein, dennoch zeigt der von uns gemessene Wert aber auch deutlich, daß wir zumindest die richtige Mode erwisch haben ...

2.3 Impedanzmessung

In diesem Versuchsteil untersuchten wir die Auswirkungen eines in den Hohlleiter eindringenden Pfostens. Der Versuchsaufbau sah diesmal folgendermaßen aus:



Mit dem Stehwellendetektor bestimmten wir zunächst die Spannungen bei den Minima und Maxima. Aus dem Vergleich zweier korrespondierender Minima und Maxima über Formel (1.12) und Mittelwertbildung dieser Extremum-Paare erhalten wir das Stehwellenverhältnis S bei einer Eindringtiefe des Pfostens von 4,6 mm.

Unsere Messung lieferte:

Minimum $\pm 0,2$ [mV]	0,8	0,6	0,6	0,6
Maximum $\pm 0,2$ [mV]	3,8	3,4	3,4	3,6
S_i	4,75	5,67	5,67	6

Damit ergibt sich das Stehwellenverhältnis zu

$$S = 5,5225 \pm 0,53798 .$$

Als nächstes bestimmen wir die Impedanzen. Dazu ermitteln wir zuerst das Verhältnis l_0/λ_L und gehen dann ins Smith-Diagramm (wie in der Vorbereitung beschrieben). Die Entfernung des ersten Minimums vom Pfosten l_0 ergibt sich aus dem ersten meßbaren Minimum, das bei $4,77 \pm 0,2$ cm vom Flansch und dem Pfosten, der $6,5 \pm 0,01$ cm vom Flansch entfernt liegt. Damit ergibt sich l_0 zu

$$l_0 = (11,27 - 5 \cdot \frac{4,38}{2}) \text{ cm} = 0,32 \text{ cm} .$$

Insgesamt (mit Fehlerrechnung) ist l_0 dann

$$l_0 = (0,32 \pm 0,21) \text{ cm}$$

und

$$l_0/\lambda_L = 0,073 \pm 0,048 .$$

Leider haben wir hier einen relativ großen Fehler, der im wesentlichen aus unserer Ablesegenauigkeit von 0,2 cm für die Minimalage resultiert. Da das Ablesen nun einmal nicht genauer ging, können wir ja jetzt nicht einfach pfeuschen; wir müssen jetzt auch große Fehler zugestehen.

Mit Hilfe des Smith-Diagramms (1), das sich zwischen unserer Auswertung und der Versuchsanleitung befindet, ist es nun möglich, die Impedanz des Pfostens bei der Eindringtiefe von 4,6 mm zu bestimmen. Sie ist

$$\frac{Z}{Z_0} = (0,23 \pm 0,02) - i \cdot (0,48 \pm 0,3) .$$

Der obige große Fehler für $\frac{l_0}{\lambda_L}$ schlägt sich also nun in einem großen Fehler für den Imaginärteil von $\frac{Z}{Z_0}$, dem Blindwiderstand, nieder . . .

Wenn wir den Pfosten nun 6,8834 mm eindringen lassen, dann beobachten wir Reihenresonanz, also ein Minimum der transmittierten Leistung. Wie beim Kurzschluß ist dann das Stehwellenverhältnis $S = \infty$, da $U_{\min} = 0$.

Wieder bestimmen wir l_0/λ_L . Die Entfernung des ersten Minimums vom Pfosten l_0 ergibt sich wieder aus dem ersten meßbaren Minimum, das nun bei $4,43 \pm 0,2$ cm vom Flansch entfernt liegt und dem Pfosten, der einen Abstand von $6,5 \pm 0,01$ cm vom Flansch hat. Damit ergibt sich l_0 zu

$$l_0 = (10,93 - 4 \cdot \frac{4,38}{2}) \text{ cm} = 2,17 \text{ cm} .$$

Insgesamt (wieder mit Fehler) ist l_0 dann

$$l_0 = 2,17 \pm 0,21 \text{ cm}$$

und

$$l_0/\lambda_L = 0,495 \pm 0,048 .$$

Mit Hilfe des Smith-Diagramms (2), das wiederum zwischen Auswertung und Versuchsanleitung liegt, ist es wieder möglich, die Impedanz des Pfostens bei der Eindringtiefe von 6,88 mm zu bestimmen. Sie ist

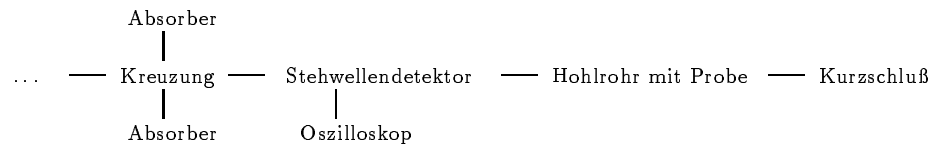
$$\frac{Z}{Z_0} = i \cdot (0,03 \pm 0,4) .$$

Der große Fehler erklärt sich wiederum durch die Ablesegenauigkeit bei der Bestimmung der Lage des ersten Minimums.

2.4 Die Dielektrizitätskonstante

2.4.1 Messung im Hohlleiter

Wir wollen nun die Auswirkungen eines Dielektrikums im Hohlleiter untersuchen. Dazu werden wir die veränderte Wellenlänge λ_ϵ und die Dielektrizitätskonstante ϵ bestimmen. Der Versuchsaufbau für dieses Unterfangen ist folgendermaßen:



Bei der Ausmessung des Stehwellenfeldes im Hohlleiter ergeben sich folgende Positionen der Minima in Millimeter mit einem jeweiligen Fehler von $\pm 0,5$ mm:

Luft	49,0	71,2	93,2	114,7
Trovidur	38,0	58,9	81,3	102,7
Pertinax	36,8	58,8	79,2	102,2
Polystyrol	39,5	60,2	82,8	105,0
Plexiglas	39,8	60,2	82,6	104,5
Teflon	41,3	63,0	85,0	108,2
Unbekannt	38,6	58,4	80,2	102,3
Holz ver. (1)	40,7	61,7	83,6	105,0
Holz hor. (2)	39,4	60,8	83,4	105,0

Wir erhalten dann folgende Werte für die Verschiebung d der Minima gegenüber Luft. Zusätzlich ist auch noch die jeweilige Probendicke L angegeben.

	Trovidur	Pertinax	Polystyrol	Plexiglas	Teflon	???	Holz 1	Holz 2
$d \pm 0,71$ [mm]	11,8	12,775	10,15	10,25	7,65	12,15	9,275	9,875
$L \pm 0,1$ [mm]	8	10	10	10	8,9	9,8	9,9	9,9

Mit der Beziehung (1.16) läßt sich nun die Wellenlänge λ_{L_ϵ} im Hohlleiter mit Dielektrikum bestimmen: $\frac{\tan \frac{2\pi(d+L)}{\lambda_L}}{\frac{2\pi L}{\lambda_L}} = \frac{\tan \frac{2\pi L}{\lambda_{L_\epsilon}}}{\frac{2\pi L}{\lambda_{L_\epsilon}}}$. Die Bestimmung ist ein sehr mühsames Unterfangen, da sie zum Teil mittels maple durchgeführt wurde. Wie sind wir nun aber dabei explizit vorgegangen? Zunächst haben wir mit unseren Werten die linke Seite obenstehender Gleichung berechnet. Der berechnete Wert wurde dann dem Programm maple zur Bearbeitung vorgelegt (der Graph erwies sich für unsere Werte als ungeeignet). Wir konnten so x -Werte für $\tan(x)/x$ bestimmen, die wir dann wiederum nach λ_{L_ϵ} umrechnen konnten. Hat man damit λ_{L_ϵ} bestimmt, so kann man Gleichung (1.14) umformen, sodaß man bei der H_{10} -Mode die Dielektrizitätskonstante ϵ über folgende Formel bestimmen kann:

$$\epsilon = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{L_\epsilon}} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 .$$

Wir erhalten dann die folgende Tabelle:

	Trovidur	Pertinax	Polystyrol	Plexiglas
linke Seite	$-0,249 \pm 0,093$	$0,104 \pm 0,073$	$-0,162 \pm 0,074$	$-0,151 \pm 0,073$
x -Werte	$2,572 \pm 0,165$	$3,491 \pm 0,234$	$2,726 \pm 0,166$	$2,748 \pm 0,170$
λ_ϵ [mm]	$19,54 \pm 1,28$	$18,00 \pm 1,22$	$23,05 \pm 1,41$	$22,87 \pm 1,43$
ϵ	$3,07 \pm 0,15$	$3,54 \pm 0,17$	$2,34 \pm 0,12$	$2,37 \pm 0,12$
	Teflon	???	Holz 1	Holz 2
linke Seite	$-0,724 \pm 0,109$	$0,0214 \pm 0,0733$	$-0,272 \pm 0,077$	$-0,204 \pm 0,075$
x -Werte	$2,143 \pm 0,063$	$3,210 \pm 0,248$	$2,538 \pm 0,126$	$2,647 \pm 0,15$
λ_ϵ [mm]	$26,09 \pm 0,82$	$19,18 \pm 1,49$	$24,51 \pm 1,24$	$23,50 \pm 1,35$
ϵ	$1,93 \pm 0,05$	$3,17 \pm 0,18$	$2,13 \pm 0,09$	$2,27 \pm 0,11$

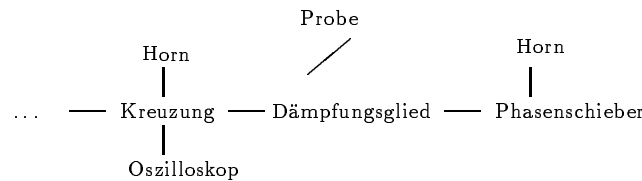
Wir wollten mit unseren Holz-Messungen nachweisen, daß dieses anisotrop ist (weil Sperrholz, wie man bereits äußerlich sieht). Wir können zwar einen Hauch von Anisotropie feststellen, eine sichere Aussage können wir aufgrund der jeweiligen Fehler bei ε aber leider nicht machen. Schade eigentlich. Ein Vergleich mit einem Literaturwert von Holz ist unsinnig, da je nach Sorte und Feuchtigkeitsgehalt die DK sowieso stark streut.

Der Vergleich mit Literaturwerten (s. u.) bei den Kunststoffen, die bekannt sind, ist nicht allzu überzeugend. Allerdings ist zu bedenken, daß dies zu einem Teil daran liegt, daß die Literaturwerte bei 1 MHz aufgenommen wurden, während wir ja bei 9515 MHz gemessen haben. Zwischen diesen Frequenzbereichen ist aber keine extreme Veränderung der DK zu erwarten.

Der gemessene Wert von Trovidur liegt als einziger wirklich schön. Bei Plexiglas und Polystyrol sind wir zu niedrig. Die unbekannt Probe und das Holz ist nicht vergleichbar (Holz: s. o.; unbekannt Probe erklärt sich wohl von selbst ...). Bei den anderen beiden Kunststoffen fanden wir leider keine Literaturwerte. Als mögliche Fehlerquelle unserer Messungen können wir z. B. nicht ausschließen, daß Luft zwischen Kurzschluß und Probe gekommen ist, wenn wir nach dem Auswechseln der Probe den Kurzschluß wieder angeschraubt haben; wir haben aber (nach ein paar Fehlmessungen) sehr darauf geachtet, daß dieses eben nicht passiert.

2.4.2 Messung im freien Raum

Wir haben in diesem Versuchsteil die Dielektrizitätskonstante im freien Raum untersucht. Dazu haben wir die Probe zwischen die beiden Hörner unter einem Winkel von 45 Grad plziert¹ und dann die Phasenverschiebung gemessen:



Die gemessenen Plattendicken d , die Einstellungen am Phasenschieber s und die über die Eichung (in der Versuchsanleitung) bestimmten Phasenverschiebungen Φ sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Pertinax	Trovidur	Plexiglas	Polystyrol
d [mm]	9,5	7,7	8,2	10,3
s [mm]	2,3	3,74	3,74	3,42
$\Phi \pm 5$ [Grad]	145	73	73	92

Mit Hilfe der Beziehung (1.17) $\varepsilon = \left(\frac{\lambda_0 \Phi}{2\pi d} + \cos \alpha\right)^2 + \sin^2 \alpha$ und $\alpha = 45^\circ$ erhalten wir in der folgenden Tabelle die Dielektrizitätskonstanten, die wir mit den Literaturwerten vergleichen können:

	Pertinax	Trovidur	Plexiglas	Polystyrol
$\varepsilon_{\text{Experiment}}$	$4,674 \pm 0,124$	$2,862 \pm 0,096$	$2,709 \pm 0,084$	$2,717 \pm 0,067$
$\varepsilon_{\text{Theorie}}$		3,1 - 3,4	2,7 - 3,5	2,5 - 2,7

Diesmal liegen wir ganz gut mit unseren Messungen, auch wenn diesmal der Meßwert beim Trovidur nicht ganz stimmt. Die sonst guten Ergebnisse haben uns positiv überrascht, denn hier mußten wir die

¹Wir vermeiden so störende Reflexionen.

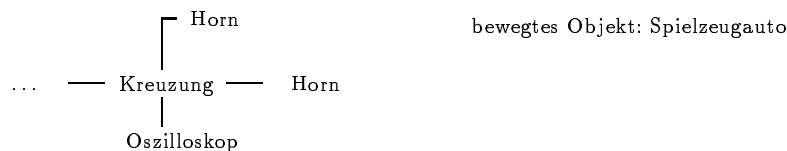
Eichkurve des Phasenschiebers konsultieren. Da diese sehr ungenau ist, hätten wir hier eigentlich die schlechteren Ergebnisse als bei der Messung im Hohlleiter erwartet. Insbesondere auch deshalb, weil bei uns der Phasenschieber zunächst überhaupt nicht funktioniert hat, weil die Schraube klemmte. Erst als dieses Problem nach längerem Werkeln gelöst war, haben wir unsere guten Meßwerte aufnehmen können.

Der Pertinax-Wert, den wir im freien Raum gemessen haben, weicht recht deutlich von dem Wert im Hohlleiter ab. Da aber auch die anderen Werte im Hohlleiter zu niedrig lagen, gehen wir davon aus, daß der Wert im Hohlleiter der schlechtere ist.

Wir möchten nochmal darauf hinweisen, daß der Vergleich mit den Literaturwerten einen Schwachpunkt hat. Die Literaturwerte wurden bei 10^6 Hz bestimmt, wir haben aber bei einer Frequenz von 9515 MHz gemessen.

2.5 Doppler-Effekt

In diesem Versuchsteil wollen wir eine Radarfalle aufbauen und ausmessen:



Dazu haben wir ein Auto bewegt und Zeit bzw. Strecke gemessen. Wir können daraus die Referenzgeschwindigkeit des Autos berechnen. Auf dem Scope messen wir gleichzeitig die Periodendauer T der registrierten Schwebung. Daraus kann dann die Zwischenfrequenz ν_f und schließlich die Geschwindigkeit des Autos bestimmt werden. Beide Geschwindigkeiten können dann verglichen werden.

Wir haben vier Messungen durchgeführt. Dabei wurde die Geschwindigkeit durch den Zusammenhang (1.18) $\nu_f = 2f_0 \frac{v}{c_0}$ ermittelt. Mit $c_0 = f_0 \cdot \lambda_0$ und $\lambda_0 = 31,5074 \pm 0,0003$ mm für den freien Raum erhalten wir

$$v = \frac{\lambda_0}{2} \cdot \nu_f = 1,575 \text{ cm} \cdot \nu_f .$$

Unsere Meßergebnisse sind in folgender Tabelle aufgeführt:

Messung	1	2	3	4
Periodendauer [msec]	35 ± 10	50 ± 10	25 ± 10	90 ± 20
Zwischenfrequenz [Hz]	$28,57 \pm 8,16$	20 ± 4	40 ± 16	$11,11 \pm 2,47$
Geschwindigkeit [cm/sec]	$45,01 \pm 16,4$	$31,51 \pm 8$	$63,01 \pm 32$	$17,50 \pm 5,2$

Die Referenzgeschwindigkeit und die Meßdaten finden sich in folgender Tabelle. Dabei war die Fahrstrecke jeweils $1 \pm 0,1$ m lang.

Messung	1	2	3	4
Fahrzeit t [sec]	3,63	4,59	2,78	7,78
Geschwindigkeit v_d [cm/sec]	$27,55 \pm 2,75$	$21,79 \pm 2,18$	$35,97 \pm 3,60$	$12,85 \pm 1,29$

Die Geschwindigkeit v_d ist dabei natürlich die Durchschnittsgeschwindigkeit. Vergleichen wir die jeweiligen Geschwindigkeiten, so erkennen wir eine Übereinstimmung unserer Radarfallenmessung mit der „richtigen“ Messung innerhalb der Fehlergrenzen. Die Meßwerte der Radarmessung ergeben aber immer deutlich höhere Werte als die „wirklichen“ Werte. Jedwede Ähnlichkeit mit von der Polizei eingesetzten Radarfallen ist natürlich nicht gegeben :-).

Die systematischen Abweichungen innerhalb der Fehlergrenzen erklären sich natürlich zwanglos aus der großen Ungenauigkeit bei der Messung von T am Scope. Anscheinend haben wir dort zu kleine Periodendauern gemessen. Diese bedingen dann ein größeres ν_f und v .

Literaturverzeichnis

Im folgenden wollen wir auf die Versuchsprotokolle der anderen Experimente im Fortgeschrittenenpraktikum, die von uns durchgeführt wurden und das vorliegende Protokoll hinsichtlich der theoretischen Grundlagen ergänzen, verweisen². Außerdem stellen wir eine Liste der Literatur auf, die wir am stärksten (nicht als einzige) zur Vorbereitung und Auswertung nutzten.

- [Fest-16] O. Flimm, U. Münch: *Elektrische Messungen an einem Ferroelektrikum*, Versuch 16 im Fortgeschrittenenpraktikum am II. Physikalischen Institut. Versuchsprotokoll. Köln, 1994/95
- [AP-O319] O. Flimm, O. Klar bzw. U. Münch, C. Wolf: *Fresnel'sche Formeln*, Versuch O 319 im Anfängerpraktikum am II. Physikalischen Institut. Versuchsprotokoll. Köln, 1992
- [FP-8a] O. Flimm, U. Münch: *Analoge Elektronik*, Versuch 8a im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [TP2] Prof. M. Zirnbauer: *Theoretische Physik II: Klassische Elektrodynamik*. Vorlesungsmitschrift von A. Sindermann. Köln, SS 1991
- [Rel1] Prof. F. W. Hehl: *Relativitätstheorie I*. Vorlesungsmitschrift von U. Münch. Köln, WS 1993/94
- [Rel2] Prof. F. W. Hehl: *Relativitätstheorie II*. Vorlesungsmitschrift von U. Münch. Köln, WS 1994/95
- [Diff] Prof. Dr. H. Reckziegel: *Definitionen, Formeln, Sätze zu dem Vorlesungszyklus über Differentialgeometrie*. Vorlesungsskript. Köln, WS 1992/93–SS 1994
- [Feyn-2] R. P. Feynman: *Vorlesungen über Physik, Band 2: Hauptsächlich Elektromagnetismus und Struktur der Materie*. Oldenbourg Verlag, 1963
- [Nimtz] G. Nimtz: *Grundlagen und Anwendungen der Mikrowellen*. Carl Hauser Verlag.
- [B-F] A. J. Baden Fuller: *Mikrowellen*. Uni Text Vieweg, 1974
- [Jac] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 1975

²Wir möchten darauf hinweisen, daß wir hier auch Quellen angeben, die nicht allgemein verfügbar sind, bzw. gar nicht veröffentlicht wurden. Dies geschieht *ausschließlich*, damit *wir*, die Praktikanten, später noch wissen, wo sich in unseren Materialien noch ergänzende Hinweise befinden. Wir bitten den Betreuer des Versuches über solche Literaturzitate hinwegzusehen; wir sind natürlich bereit, auch solche Stellen z.B. als Kopie zur Verfügung zu stellen, wenn dies gewünscht wird.

Index

- Absorber, 15
- Cut-off-Wellenlänge, 6
- Dämpfungsglieder, 15
- Debye-Formeln, 19
- Detektoren, 16
- Dielektrizitätskonstante, 17, 27
- Diode, 16
 - Impatt-, 13
 - Lawinen-Laufzeit-, 13
- Dipolpolarisation, 17, 18
- Doppler-Effekt, 22, 30
- E-Mode, 8
- ebene Welle, 4
- Eichung, Lorentz-, 3
- Einweg-Hohlleiter, 15
- elektrische Erregung, 2
- elektrische Feldstärke, 2
- elektrische transversale Mode, 8
- elektrische transversale Welle, 8
- elektrisches Potential, 3
- Elektronenpolarisation, 17, 18
- Erregung
 - elektrische, 2
 - magnetische, 2
- evaleszente Mode, 7
- Fähnchen-Abschwächer, 15
- Faraday'sches Induktionsgesetz, 3
- Feldstärke
 - elektrische, 2
 - magnetische, 2
- H-Mode, 8
- Hohlleiter, 5
 - Einweg-, 15
- Hornstrahler, 16
- Impatt-Diode, 13
 - Kennlinie, 24
- Impedanz, 10, 11, 20, 26
- Induktionsgesetz, Faraday'sches, 3
- Ionenpolarisation, 17, 18
- Kontinuitätsgleichung, 2
- Kurzschluß, 14
- Laplace-Operator, 4
- Lawinen-Laufzeit-Diode, 13
- Lorentz-Eichung, 3
- magnetische Erregung, 2
- magnetische Feldstärke, 2
- magnetische transversale Mode, 8
- magnetische transversale Welle, 8
- magnetisches Potential, 3
- Maxwell-Gleichungen, 2
- Mikrowellenresonator, 13
- Mode, 7
 - E, 8
 - evaleszente, 7
 - H, 8
 - rein transversale, 5
 - TE, 8
 - TEM, 5
 - TM, 8
 - transversale elektrische, 8
 - transversale magnetische, 8
- negativer differentieller Widerstand, 14
- Permeabilität, 17
- Phasenschieber, 16
- Polarisation, 17
- Potential
 - elektrisches, 3
 - magnetisches, 3
- Randbedingungen, 6
- Reflexionskoeffizient, 11
 - rein transversale Mode, 5
 - rein transversale Wellen, 5
- Relaxation, 18
- Relaxationszeit, 19
- Resonanz, 18
- Resonator, 13
- Schwert, 15
- Smith-Diagramm, 12, 26
- Snellius'sches Brechungsgesetz, 21
- Stehwellendetektor, 16

Stehwellenverhältnis, 11

Suszeptibilität, 17

TE-Mode, 8

TEM-Mode, 5

TM-Mode, 8

transversale elektrische Mode, 8

transversale elektrische Welle, 8

transversale magnetische Mode, 8

transversale magnetische Welle, 8

transversale Mode, 5

transversale Wellen, 5

Welle

ebene, 4

rein transversale, 5

transversale elektrische, 8

transversale magnetische, 8

Wellengleichung, 4

Wellenlänge, Cut-off, 6

Wellenwiderstand, 5, 20

Welligkeitsfaktor, 11