

Betreuer: Dr. Zell

Fortgeschrittenen-Praktikum am
Institut für Kernphysik

Beta-Szintillation¹

Oliver Flimm
Oberstraße 74
51149 Köln

Uwe Münch
Schmittgasse 92
51143 Köln

Wintersemester 93/94²

e-mail: flimm@ph-cip.uni-koeln.de
muench@ph-cip.uni-koeln.de

¹Versuch 11

²Durchführung des Versuchs: 24.1.94

Vorwort

Wir wollen hier zunächst ein paar Worte zum Aufbau unseres Versuchsprotokolls verlieren. Denn auf den nächsten Seiten zierte ein „© by Oliver Flimm und Uwe Münch“ die letzte Zeile. Warum dies? Sind diese beiden Praktikanten so eingebildet oder übergeschnappt? Nein, das sind wir nicht, und wir wollen jetzt also begründen, warum wir diese Zeile am Ende jeder Seite für nötig halten.

Viele Praktikanten bereiten ihre Versuche im CIPLAB vor und werten sie auch dort aus. Nur einige davon schützen ihre Arbeit vor Zugriff durch andere. Das bedeutet, daß man sich vielfach die .dvi-Dateien anschauen kann, aber auch daß man direkt auf .tex-Sourcen zugreifen könnte. Dieser Zustand ist ja allgemein bekannt. Wie ist nun unsere Einstellung dazu?

Wir denken, daß es nicht Sinn der Sache (d. h. des FP's) sein kann, sich einfach die Sourcen zu kopieren. Zumeist sind diese Vorlagen auch lückenhaft oder enthalten Fehler. Kurz gesagt, aus diesen Gründen benutzten wir keine solchen Textvorlagen. (Über unser Verfahren, was Bilder angeht, werden wir uns gleich äußern.) Wie sieht das nun mit .dvi-Files aus? Wir denken, daß ein Aspekt des Fortgeschrittenpraktikums ist, daß wir lernen, wie man durchgeführte Versuche protokolliert, beschreibt und (später mal) veröffentlicht. Zu diesem Lernprozeß gehört es sicherlich auch, anhand von Beispielen zu sehen, wie so etwas geschieht. (Allerdings bezweifeln wir, daß dazu die Vorlagen immer so geeignet sind.) Zumindest halten wir es für keinen Frevel, wenn man sich anhand anderer Ausarbeitungen eine Idee holt, wie Versuchsprotokolle anzufertigen sind. Daher beabsichtigen auch wir, unsere .dvi-Dateien im CIPLAB allgemein lesbar zur Verfügung zu stellen. Dies wird *nicht* mit unseren .tex-Sourcen geschehen! Diese halten wir natürlich geschützt. Wir wollen nämlich nicht, daß unsere Mühen *einfach so* von anderen, uns bekannten oder unbekanntem Studenten weiter genutzt werden. Wie oben dargelegt, haben wir aber nichts dagegen, wenn unsere Ausarbeitung als Beispiel und Denkanstoß dient. Für Nachfragen, etc. haben wir unsere vollständigen Normal- und unsere e-mail-Adressen angegeben. Damit niemand auf die Idee kommt, sich das Leben doch zu einfach zu machen und die .dvi-Datei einfach ausdruckt und in der Hoffnung, daß sie keiner wiedererkennt, abgibt, haben wir die Copyright-Zeile eingefügt. Diese dürfte so etwas effektiv verhindern. Außerdem (wovon wir weniger überzeugt sind) dient sie vielleicht als psychologische Sperre, zu wörtlich von uns abzuschreiben.

Nachdem wir uns so ausführlich über diese Vorgehensweise ausgelassen haben, wollen wir dann auch noch ein paar Worte über Bildvorlagen verlieren. Bei manchen Versuchen benutzten wir aus Büchern eingescannte Graphiken. Wir haben dann jeweils die Herkunft vollständig (also am Bild und im Literaturverzeichnis) dokumentiert. Alle sonstigen Bilder sind von uns mittels xfig, gnuplot oder ähnlichen Programmen selbst erstellt worden.

Ein paar abschließende Worte zur benutzten $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Umgebung: Wir erstellten unsere Ausarbeitungen bereits mit der Testversion des neuen Formats $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$. Die benutzten Classes und Packages sind allerdings noch von Hand von uns angepaßt worden. Aber nun in medias res...

Inhaltsverzeichnis

1. Ursachen, Verlauf und Folgen der β-Zerfälle	1
1.1 Verschiedene Begriffe	1
1.2 Die semiempirische Massenformel von Bethe-Weizsäcker	1
1.3 Verschiedene Arten von β -Zerfällen	7
1.3.1 Zerfall realer Kerne ins Energietal	8
1.4 Das Neutrino	10
1.5 Innere Konversion und γ -Zerfälle	12
1.6 Das β -Spektrum	13
1.6.1 Fermi-Theorie	14
1.6.2 Der Kurie-Plot	18
1.6.3 Fermi-Theorie, Teil 2	19
1.7 Szintillationszähler	20
2. Auswertung	22
2.1 Eichung	22
2.2 Spektrum und Kurie-Plots	24
2.3 Konversionskoeffizient	29
2.4 Auflösungsvermögen	30
2.5 Ansprechvermögen und Comptonkante	31
2.6 Rückstoßenergie	32
A. Ein Programm zu den Kurie-Plots	34
B. Errechnete Kurie-Daten	37
Literaturverzeichnis	40
Index	41

Abbildungsverzeichnis

1.1	Empirische Bindungsenergie	2
1.3	Getrenntes Pauli-Prinzip für Protonen und Neutronen	4
1.2	Neutronenzahl <i>vs</i> Kernladungszahl	5
1.4	Terme der WEIZSÄCKER-Formel	6
1.5	β -Zerfälle schematisch	7
1.6	Massenparabeln bei konstanten Massenzahlen	9
1.7	β -Zerfall entlang der Massenparabeln ins Energietal	10
1.8	Das β -Spektrum	13
1.9	Coulombkorrektur der β -Spektren	17
1.10	Die Fermi-Funktionen	17
1.11	Ein Kurie-Plot	18
1.12	Kurie-Plot zweier β -Zerfälle	18
1.13	Kurie-Plot bei endlicher Neutrinomasse m_ν	19
1.14	Protonen und Neutronen in einem Spiegelkern	20
2.1	Übergänge in den Präparaten.	22
2.2	Die Eichspektren.	23
2.3	Die Eichgerade	23
2.4	Ein Eichspektrum bei großem Abstand	23
2.5	Unser β -Spektrum des ^{137}Cs	25
2.6	Kurie-Plot des gesamten Spektrums.	26
2.7	Der Kurie-Plot des hochenergetischen Zerfalls.	27
2.8	Der Kurie-Plot des niederenergetischen Zerfalls.	28
2.9	Energiespektrum des niederenergetischen β -Zerfalls	29
2.10	Impulsspektrum des niederenergetischen β -Zerfalls	29
2.11	Das gemessene γ -Spektrum	31

1. Ursachen, Verlauf und Folgen der β -Zerfälle

In diesem Versuch befassen wir uns ausführlich mit β -Zerfällen. Mit dem γ -Zerfall beschäftigten wir uns bereits in dem Versuch 5 [FP-5], dem Versuch 7 [FP-7] und dem Versuch 17 [FP-17]. Um den α -Zerfall drehte sich der Versuch 9 [FP-9]. Diese Zerfälle haben wir in den Vorbereitungen dieser Versuche bereits ausführlich beschrieben, sodaß wir uns hier alleine auf den β -Zerfall konzentrieren werden.

Wir werden zunächst die semiempirische Massenformel von Bethe-Weizsäcker beschreiben. An ihr können wir dann später sehr schön ablesen, ob und welcher β -Zerfall energetisch möglich ist. Wir werden dann im folgenden die drei möglichen β -Zerfälle beschreiben und das Neutrino vorstellen. Bevor wir uns mit dem β -Spektrum, das man mit den Detektoren empfängt, beschäftigen, werden wir uns noch kurz mit der inneren Konversion beschäftigen, die ein Konkurrenzprozeß zum γ -Zerfall ist. Abschließend werden wir verschiedene Techniken zum Auswerten des detektierten Spektrums diskutieren.

1.1 Verschiedene Begriffe

Wir bezeichnen die *Kernladungszahl*, also die Zahl der Protonen in einem Kern, mit Z . Kerne mit gleichem Z bezeichnet man als *Isotope*. Die Zahl der Neutronen in einem Kern bezeichnen wir mit N . Kerne mit gleicher Neutronenzahl bezeichnet man als *Isotone*. Die *Nukleonenzahl* oder *Massenzahl*, die wir mit A bezeichnen, ist die Zahl der Nukleonen im Kern, also die Summe aus Protonen und Neutronen: $A = N + Z$. Kerne, deren Nukleonenzahl gleich ist, nennt man *Isobare*. Mit letzteren werden wir es in diesem Versuch näher zu tun haben.

Weiterhin nennen wir Kerne, bei denen sowohl Kernladungszahl als auch Neutronenzahl gerade ist, *gg-Kerne*. Analog benennen wir Kerne, bei denen eine oder beide Zahlen ungerade sind. Das erste g bzw. u steht für die Kernladungszahl. Also erhalten wir folgende Tabelle. Wir geben in ihr schon jetzt auch die Zahl der stabilen Isotope an.

Benennung	Kernladungszahl Z	Neutronenzahl N	# stabiler Isotope
<i>gg</i> -Kern	gerade	gerade	165
<i>gu</i> -Kern	gerade	ungerade	55
<i>ug</i> -Kern	ungerade	gerade	50
<i>uu</i> -Kern	ungerade	ungerade	4

1.2 Die semiempirische Massenformel von Bethe-Weizsäcker

Die Masse eines Kerns ist nicht einfach gleich der Summe der Protonen- und Neutronenmassen. Denn nach Einstein sind Energien und Massen äquivalent. Bei Kernen bedeutet das, daß auch die Bindungsenergien, die aufgrund der anziehenden Kernkräfte bei der Entstehung eines Atoms frei werden, sich als meßbarer Massendefekt manifestieren. Die Änderungen gerade dieser Bindungsenergien, also der

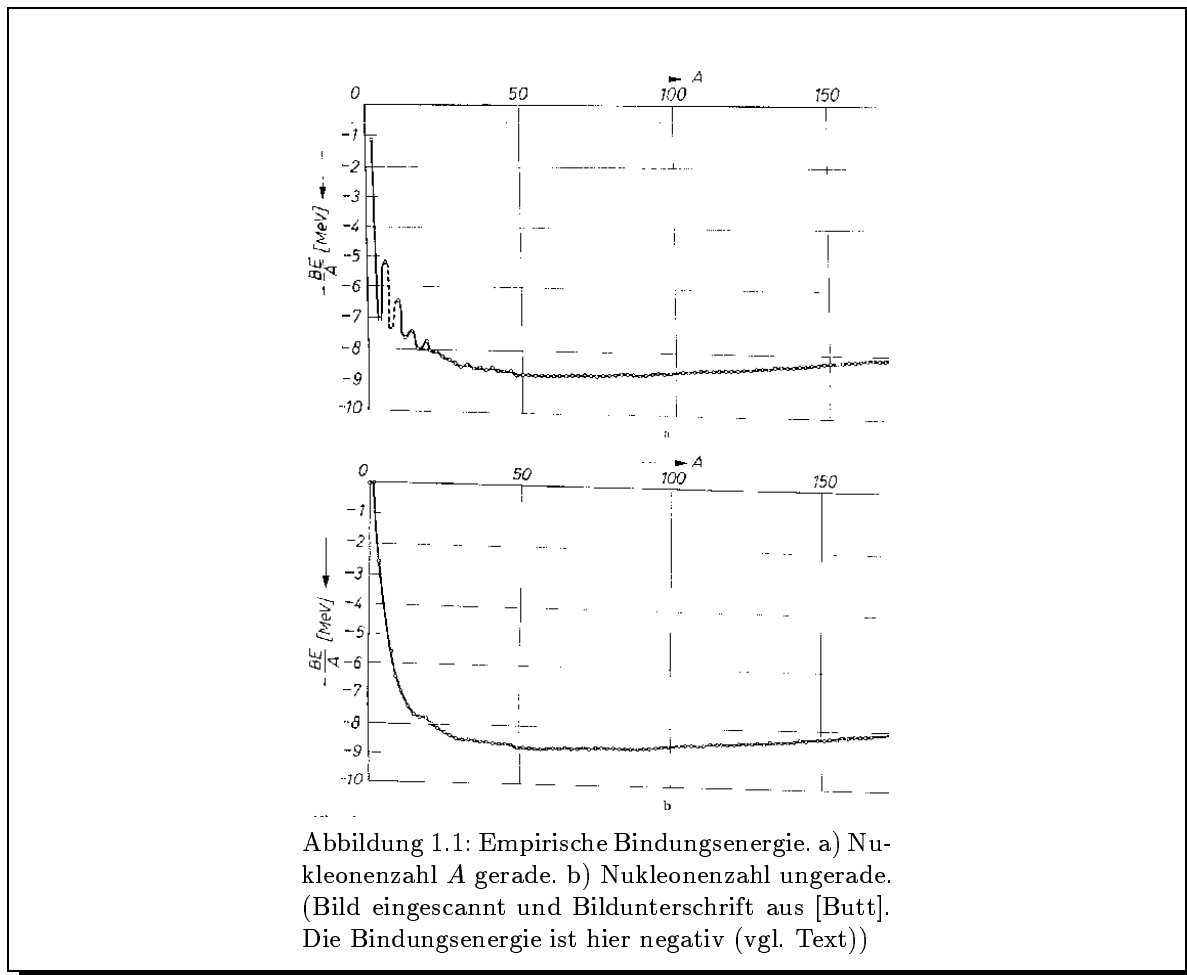


Abbildung 1.1: Empirische Bindungsenergie. a) Nukleonenzahl A gerade. b) Nukleonenzahl ungerade. (Bild eingescannt und Bildunterschrift aus [Butt]. Die Bindungsenergie ist hier negativ (vgl. Text))

zugehörigen Massendefekte, sind die treibenden Faktoren von Kernzerfällen durch α - oder β -Strahlung. Die Masse eines Kerns beträgt also gerade

$$M(Z, A) = Z \cdot M_{\text{Proton}} + N \cdot M_{\text{Neutron}} - B,$$

wobei B für die Bindungsenergie steht, die wir positiv zählen, wenn sie von anziehenden Kräften herrührt. (Bei den Scans aus [Butt] werden die Bindungsenergien dann gerade negativ gezählt. Das sollte allerdings zu keinen Verwirrungen führen.) Wenn wir nun eine Formel für B kennen, können wir alle Kernmassen berechnen. Die semiempirische Massenformel ist nun gerade eine solche Formel für B . Die experimentell gemessenen Bindungsenergien pro Nukleon $\frac{B}{A}$ sind der Abbildung 1.1 entnehmbar.

Um die Massenformel zu bestimmen, geht man nun von folgender Modellvorstellung eines Kernes aus, dem sogenannten *Tröpfchenmodell*: Wir stellen uns den Kern als Flüssigkeitströpfchen vor, dessen Moleküle die Nukleonen sind. Das Tröpfchen unterliegt nun verschiedenen, sich überlagernden Einflüssen, die alle ihren Teil zur Bindungsenergie beitragen. Diese einzelnen Beiträge, die aus physikalischen Annahmen und Modellvorstellungen kommen, sind der theoretische Teil der Massenformel. Ihr Anteil an der Gesamtbindungsenergie wird über Proportionalitätskonstanten bestimmt, die experimentell ermittelt werden. Das ist der empirische Teil der Massenformel. Wir gehen nun die einzelnen Anteile nacheinander durch.

Volumen- oder Kondensationsenergie

Aufgrund der Kernkräfte ziehen sich die Nukleonen an und „kondensieren“. Man kann davon ausgehen, daß die Massendichte in allen Kernen konstant ist, denn die Kernkräfte besitzen nur eine kurze Reichweite ($< 10^{-14}$ m). Daher sind für jedes Nukleon nur die nächsten Nachbarn interessant und diese Anzahl ist bei allen Kernen gleich. Da also alle weit entfernten Nachbarn keine Rolle spielen, tritt jedes neu hinzukommende Nukleon nicht mit A weiteren, sondern nur mit seinen Nachbarn in Wechselwirkung. Die Bindungsenergie der Kernkraft tritt also auch nur 1-mal mehr auf. Es gilt daher $\frac{B_{\text{Vol}}}{A} \equiv \text{const.}$ Wir setzen also für den Volumenterm

$$B_{\text{Vol}} = a_{\text{Vol}} \cdot A$$

an.

Oberflächenenergie

Nun haben wir aber einen Fehler gemacht: Die Nukleonen, die sich an der Oberfläche des Flüssigkeitströpfchens befinden, haben weniger nächste Nachbarn als die im Inneren. Die Zahl der davon betroffenen Nukleonen ist proportional zur Oberfläche der Kerne, diese ist minimal für eine Kugelgestalt. Deshalb sind kugelsymmetrische Kerne am stabilsten. Wie ist denn nun die Abhängigkeit der Oberfläche von der Nukleonenzahl? Wegen der konstanten Dichte im Kern gilt: Volumen = $\frac{4}{3}\pi R^3 \propto A$. Nach Auflösen nach R (mit $R_0 \approx 1,4 \cdot 10^{-15}$ m, dem Nukleonradius, ergibt sich $R = R_0 \cdot A^{1/3}$) und Einsetzen in „Oberfläche = $4\pi \cdot R^2$ “, ergibt sich: Oberfläche $\propto A^{2/3}$. Da dieser Term abstoßend wirken soll, weil mit dem Volumenterm „zu viel Anziehung“ beachtet wurde, setzen wir hier

$$B_{\text{Oberfl}} = -a_{\text{Oberfl}} \cdot A^{2/3}$$

an.

Coulomb-Energie

Die im Kern vereinigten gleichnamigen Ladungen üben abstoßende elektrische Kräfte aus. Diese Coulombkräfte haben lange Reichweite.

Um die Bindungsenergie durch die Coulombkräfte zu bestimmen, nehmen wir an, daß die Ladungen gleichmäßig über den kugelförmigen Kern verteilt sind, also für die Ladungsdichte $\rho \equiv \frac{Q}{\text{Vol.}} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$ gilt (R : Radius des kugelförmigen Kerns). Die Bindungsenergie ist nun die Selbstenergie der geladenen Kugel. Diese berechnet sich als $B_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^R 4\pi r^2 \cdot \phi(r) \cdot \rho \, dr$. Müssen wir nur noch das Potential $\phi(r)$ ermitteln. Das ist leider ein wenig Arbeit: Wir gehen von der 1. Maxwell-Gleichung aus: $\text{div } \vec{E} = 4\pi \cdot \rho$. Aufgrund der Kugelsymmetrie hat \vec{E} nur eine Radialkomponente $E_r := E_{\text{Radial}}(r)$. Wir wenden nun den Gauß'schen Satz auf die obige Maxwell-Gleichung an und ziehen die konstante Ladungsdichte ($r < R$) vor die Integration:

$$4\pi \cdot r^2 \cdot E_r = \int_{\partial \text{Kugel}} E_r \cdot r^2 \, d\Omega = \int_{\partial \text{Kugel}} \vec{E} \cdot \vec{dA} = \int_{\text{Kugel}} 4\pi \cdot \rho \, dV = 4\pi \cdot \rho \int_{\text{Kugel}} dV = 4\pi \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{3Ze}{4\pi R^3}.$$

Also gilt: $E_r = \frac{Ze}{R^3} \cdot r$ für $r < R$. Da man den Bezugspunkt des Potentials konventionsgemäß durch $\phi(\infty) = 0$ festlegt, denn nur dann kommt die obige Selbstenergie richtig heraus, kann man für das Potential innerhalb des Kerns ($r < R$) zunächst nur folgenden, von einer Konstanten c abhängigen Ausdruck bestimmen (das Potential berechnet sich ja über $\phi = -\int \vec{E} \cdot \vec{dr}$):

$$\phi(r) = -\frac{Ze}{R^3} \cdot \frac{r^2}{2} + c.$$

Außerhalb des Kerns ergibt sich mittels Gauß analog zu oben:

$$4\pi \cdot r^2 \cdot E_r = \int_{\partial \text{Kugel}} E_r \cdot r^2 \, d\Omega = \int_{\partial \text{Kugel}} \vec{E} \cdot \vec{dA} = \int_{\text{Kugel}} 4\pi \cdot \rho \cdot \Theta(-R) \, dV = 4\pi Q = 4\pi \cdot Ze,$$

wobei $\Theta(-R)$ die Sprungfunktion $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ ist. Das Potential, das man daraus erhält, ist mit obiger Konvention (wie ja zu erwarten war...):

$$\phi(r) = Ze \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{für } r \geq R).$$

Da das Potential stetig bei R sein muß, kann man nun c bestimmen und man erhält insgesamt:

$$\phi(r) = Ze \cdot \begin{cases} \frac{1}{2R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{für } r \leq R \\ \frac{1}{r} & \text{für } r \geq R \end{cases}.$$

Nun können wir die Selbstenergie berechnen:

$$\begin{aligned} B_{\text{Coulomb}} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^R 4\pi r^2 \cdot \frac{Ze}{2R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot \frac{3Ze}{4\pi \cdot R^3} dr = \frac{3}{4} \cdot \frac{Z^2 e^2}{R^4} \cdot \int_0^R r^2 \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{Z^2 e^2}{R^4} \cdot \left(R^3 - \frac{1}{5} \cdot R^3\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 e^2}{R}. \end{aligned}$$

Mit der Gleichung $R = R_0 \cdot A^{1/3}$ für den Radius erhalten wir also $B_{\text{Coulomb}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_0} \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}$. Mit der Definition $a_{\text{Coulomb}} := \frac{3e^2}{5R_0}$ ergibt sich daher für die Coulomb-Bindungsenergie:

$$B_{\text{Coulomb}} = -a_{\text{Coulomb}} \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

mit einem theoretischen Wert von $a_{\text{Coulomb}} \approx 0,72 \text{ MeV}$.

Asymmetrienergie

In Abbildung 1.2 ist N als Funktion von Z für stabile Kerne angegeben. Bei leichten Kernen ist $N \approx Z$, während bei schwereren Kernen der Neutronenüberschuß zunimmt.

Wenn man unsere bisherigen Terme betrachtet, würde der Coulombterm bewirken, daß möglichst viele Neutronen im Kern vorhanden sind, sozusagen als Kitt, der an der anziehenden Kernkraft teilnimmt und es ermöglicht, daß die sich abstoßenden Protonen einen maximalen Abstand einnehmen. Rechnungen (aus [Mar]) zeigen, daß, wenn man nur die bisherigen Terme beachtet, Kerne existieren müßten mit $A = 223$ und $Z = 4$. Das ist natürlich nicht der Fall, und den Term, der noch fehlt, wollen wir jetzt erläutern.

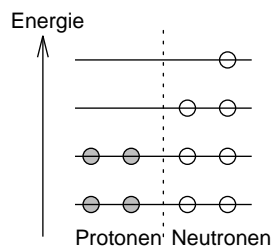


Abb. 1.3: Getrenntes Pauli-Prinzip für Protonen und Neutronen

Es handelt sich um einen rein quantenmechanisch begründeten Term. Er liegt darin begründet, daß für die Protonen und Neutronen *getrennt* das Pauli-Verbot gilt. Ist somit ein Neutronenüberschuß vorhanden, so besetzen die Neutronen höhere Zustände als die Protonen (vgl. nebenstehende Abbildung 1.3). Da dies Energie kostet, entspricht dies einem Defizit der Bindungsenergie, das von der Asymmetrie $(N - Z)$ zwischen Protonen und Neutronen verursacht wird. Ganz entsprechend würde ein Protonenüberschuß Energie kosten. Genauere Rechnungen (z. B. Modellrechnung im Buttler [Butt]) ergeben, daß man sinnvollerweise einen Asymmetrieterm der Form

$$B_{\text{Asymm}} = -a_{\text{Asymm}} \cdot \frac{(N - Z)^2}{A} = -a_{\text{Asymm}} \cdot \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

ansetzt. Dieser symmetrie-liebende Term bewirkt nun im Zusammenspiel mit dem asymmetrie-fördernden Coulombterm eine N - Z -Abhängigkeit stabiler Kerne, wie sie in Abbildung 1.2 zu erkennen ist.

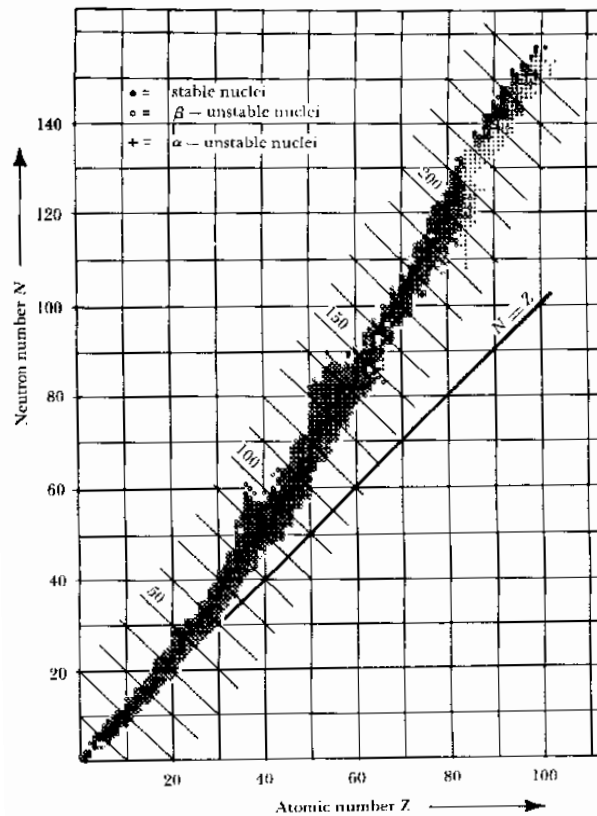


Abbildung 1.2: Representations of N vs Z for stable and radioactive nuclides, showing the onset of a neutron excess ($N > Z$) beyond the very light nuclides and indicating the trend of the “valley of β stability”. (Bild eingescannt und Bildunterschrift aus [MS])

Paarungsenergie

Die Kernkräfte haben die Eigenschaft, daß sie die Spins zweier gleicher Nukleonen antiparallel ausrichten. Das ist leicht einzusehen, denn wäre dem nicht so, so müßte das zweite Nukleon nach dem Pauli-Prinzip eine höhere Energie annehmen, obwohl eine niedrigere noch unbesetzt ist (vgl. nochmal mit Abbildung 1.3). Im Grundzustand sind also alle unteren Energieniveaus lückenlos durch Paare besetzt. Jedes unpaarige Nukleon muß nun in einem höhergelegenen Niveau Platz nehmen. Für ein zweites Nukleon, das das erste zum Paar macht, ist keine zusätzliche Energie nötig. Wir erkennen hieran, daß gg -Kerne besonders stabil sein werden, uu -Kerne besonders instabil. Dies stimmt mit der experimentellen Erfahrung überein, wie wir schon in der Tabelle auf Seite 1 gesehen haben. Diese Tatsache spiegeln wir nun durch folgenden Paarungsterm wieder:

$$B_{\text{Paar}} = \begin{cases} +\delta & \text{für } gg\text{-Kerne} \\ 0 & \text{für } gu\text{- und } ug\text{-Kerne} \\ -\delta & \text{für } uu\text{-Kerne} \end{cases}$$

Empirisch ergibt sich: $\delta = a_{\text{Paar}} \cdot A^{-3/4}$.

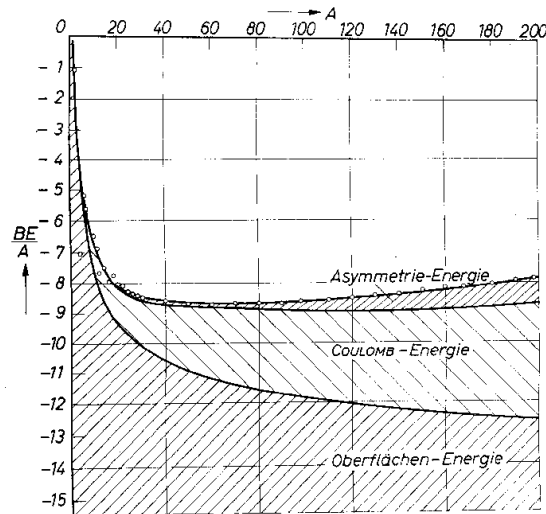


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung der Terme der WEIZSÄCKER-Formel als Funktion der Nukleonenzahl A . Der Term der Paarungsenergie wurde nicht berücksichtigt. Die (nur vereinzelt eingezeichneten) Meßpunkte sind Fig. 6.1a [aus [Butt]; bei uns: Abbildung 1.1] entnommen. Man sieht gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment für $A \gtrsim 25$. (Bild eingescannt und Bildunterschrift aus [Butt]).

Ergebnis und Werte der Konstanten a_i

Durch Summation aller Einzelterme erhalten wir als Bethe-von Weizsäcker-Massenformel für das Atom folgenden Ausdruck:

$$M(Z, A) = Z \cdot M_{\text{H}} + (A - Z) \cdot M_{\text{Neutron}} - a_{\text{Vol}} \cdot A + a_{\text{Oberfl}} \cdot A^{\frac{2}{3}} + a_{\text{Coulomb}} \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_{\text{Asymm}} \cdot \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \begin{cases} +a_{\text{Paar}} A^{-\frac{3}{4}} & \text{für } uu \\ 0 & \text{für } ug, gu \\ -a_{\text{Paar}} A^{-\frac{3}{4}} & \text{für } gg \end{cases} \quad (1.1)$$

Wir haben hierbei die Masse des Protons M_{Proton} durch die Masse des Wasserstoffatoms M_{H} ersetzt, um den Massen der gebundenen Elektronen Rechnung zu tragen.

Wir geben nun empirisch ermittelte Werte für die Konstanten aus verschiedenen Quellen an. Alle Angaben sind in MeV (k. A. bedeutet: keine Angabe).

Quelle	[MS] und [Mar]	[Butt]	Prof. Gelberg in [Ph6]	Prof. Gelberg in [Ph6]	Prof. Dost in [Ph6]
Erscheinungsjahr	1969 bzw. 1960	1964	7.5.1993	14.5.1993	11.6.1993
a_{Vol}	14,1	15,5	14	15,68	16
a_{Oberfl}	13	16,8	13	k. A.	17
a_{Coulomb}	0,595	0,72	k. A.	k. A.	0,7
a_{Asymm}	19	19	19	18,56	20
a_{Paar}	33,5	33,5	33	28,1	k. A.

Die Anteile der einzelnen Terme an der gesamten Bindungsenergie sind schematisch in Abbildung 1.4 eingezeichnet. Dies bietet nochmal einen grafischen Überblick über unsere semiempirische Massenformel.

1.3 Verschiedene Arten von β -Zerfällen

Der Begriff β -Zerfall umfaßt mehrere Arten von Kernzerfällen. Ihre Gemeinsamkeit ist zum einen der Umstand, daß bei β -Zerfällen die Massenzahl konstant bleibt. Mutter- und Tochterkern sind also Isobare. Zum anderen ändert sich die Kernladungszahl bei β -Zerfällen nur um eine Einheit. Es gibt nun 3 verschiedene Zerfälle, die diese Eigenschaften besitzen. Es handelt sich dabei um

- den β^- -Zerfall,
- den β^+ -Zerfall und
- den *Elektroneneinfang* (electron capture EC).

Wir stellen diese verschiedenen Zerfälle schematisch in Abbildung 1.5 dar, während wir sie im folgenden genauer beschreiben.

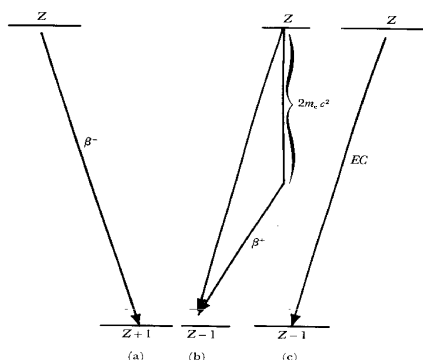
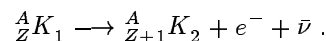


Abb. 1.5: Schematic representation of decay schemes in which the mass number A is left unchanged: (a) a β^- transition; (b) a β^+ transition, indicated in two alternative representations; (c) an electron capture transition. (Bild eingescannt und Bildunterschrift aus [MS]).

Der β^- -Zerfall

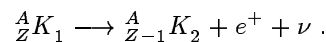
Bei dieser Zerfallsart ändert sich die Kernladung von Z auf $Z + 1$. Ein Neutron wandelt sich also in ein Proton um. Bei dieser Reaktion wird außerdem ein Elektron und ein Anti-Elektronenneutrino $\bar{\nu}$ abgestrahlt. In Formeln läßt sich die Reaktion folgendermaßen ausdrücken:



Dabei ist K_1 der Mutterkern und K_2 der Tochterkern der Reaktion.

Der β^+ -Zerfall

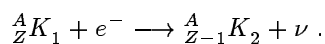
Hierbei handelt es sich gewissermaßen um die umgekehrte Reaktion: Bei dieser Zerfallsart sinkt die Kernladungszahl nämlich von Z auf $Z - 1$. Neben der Umwandlung eines Protons in ein Neutron wird außerdem noch ein Anti-Elektron, das ja Positron genannt wird, und ein Elektronenneutrino abgestrahlt. In Formeln sieht dies jetzt so aus:



Das Neutrino wird einfach mit ν bezeichnet. Die anderen Bezeichnungen werden wie eben benutzt.

Der Elektroneneinfang

Auch hierbei ändert sich die Kernladungszahl von Z nach $Z - 1$. Allerdings läuft die Reaktion qualitativ völlig verschieden ab. Mit dem Proton reagiert nämlich ein Elektron der Kernhülle. Dies ist möglich, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen am Ort des Kernes nicht Null ist. Da für die inneren Schalen diese Wahrscheinlichkeit größer ist als für äußere Elektronen, tritt der K -Elektronen-Einfang am häufigsten auf, gefolgt von dem L -Schalen-Einfang, dann dem M -Schalen-Einfang, usw. Die Reaktion in Formeln:



Erneut entsteht bei dem Zerfall ein Neutrino. Während bei den beiden anderen Zerfällen jeweils 3 Teilchen entstehen, ihre Energieverteilung also nicht diskret sein wird (s. u.), handelt es sich beim Elektroneneinfang um einen Zweiteilchenzerfall. Die kinetische Energie der Neutrinos besitzt also ein Linienspektrum. Da man allerdings — wie wir gleich sehen werden — Neutrinos nur schwer nachweisen kann, haben wir hiervon nicht so viel. Bei der einfachen Detektion mittels Szintillationszählern, etc. wird man diese Art des β -Zerfalls nicht direkt nachweisen können (nur über die γ -Strahlung der angeregten Kerne und die Röntgenstrahlung der angeregten Hülle).

Wann tritt welcher Zerfall auf?

Dazu müssen wir uns die Bindungsenergien genauer anschauen. Wir müssen dabei noch beachten, daß wir mit Kernen rechnen wollen; das bedeutet, daß wir von den Atomen die Massen der Elektronen abziehen müssen, die das Atom zur Neutralisierung benötigt. Addieren müssen wir dann natürlich wieder das entstandene Elektron. Für den β^- -Zerfall ergibt sich somit folgende Energiebilanz:

$$\begin{aligned}\Delta E &= ([M(Z, A) - Z \cdot m_e] - [M(Z + 1, A) - (Z + 1) \cdot m_e + m_e]) \cdot c^2 \\ &= (M(Z, A) - M(Z + 1, A)) \cdot c^2.\end{aligned}$$

Die Energiebilanz für den β^+ -Zerfall sieht so aus:

$$\begin{aligned}\Delta E &= ([M(Z, A) - Z \cdot m_e] - [M(Z - 1, A) - (Z - 1) \cdot m_e + m_e]) \cdot c^2 \\ &= (M(Z, A) - M(Z - 1, A) - 2m_e) \cdot c^2.\end{aligned}$$

Und schließlich noch die Energiebilanz für den Elektroneneinfang:

$$\begin{aligned}\Delta E &= ([M(Z, A) - Z \cdot m_e] + m_e - [M(Z - 1, A) - (Z - 1) \cdot m_e]) \cdot c^2 \\ &= (M(Z, A) - M(Z - 1, A)) \cdot c^2.\end{aligned}$$

Wenn $\Delta E > 0$, so finden die Zerfälle statt. Wir sehen also, daß der β^- -Zerfall und der Elektroneneinfang bereits dann stattfinden, wenn die Masse des Mutteratoms größer ist als die Masse des Tochterkerns. Der β^+ -Zerfall findet erst statt, wenn die Massendifferenz zwischen Mutter- und Tochterkern größer ist als die zweifache Elektronenmasse. Dies ist bereits in Abbildung 1.5, Teilbild b) angedeutet.

Elektroneneinfang findet bei geeigneten Kernen also alleine statt, wenn die Massendifferenz zwischen Mutter- und Tochterkern kleiner als 2 Elektronenmassen ist; ist sie größer, so konkurrieren der Elektroneneinfang und der β^+ -Zerfall miteinander. Da der Elektroneneinfang nur mit Schwierigkeiten direkt nachweisbar ist, werden wir im folgenden nur β^+ -Zerfall sagen, egal ob in Wirklichkeit nur Elektroneneinfang oder beide Prozesse in Konkurrenz stattfinden.

1.3.1 Zerfall realer Kerne ins Energietal

Wir wollen nun die Massenformel (1.1) anwenden. Das Verhalten von Isobaren ist bereits in Abbildung 1.2 angedeutet: In dieser Abbildung erkennt man viele parallele Linien, senkrecht zur $N = Z$ -Linie. Das sind die $A = \text{const}$ -Linien für verschiedene Konstanten. Wenn man an diesen Linien entlangschaut, so kann man (bei supergenauem Hinschauen) erkennen, daß es Stellen gibt, an denen nur ein Kern stabil ist und andere Stellen, an denen bis zu drei Kerne stabil sind. Wir wollen dies noch einmal deutlicher und genauer beleuchten. Dazu schreiben wir die Massenformel um in

$$M(Z, A) = \alpha \cdot A + \beta \cdot Z + \gamma \cdot Z^2 \pm \delta,$$

wobei δ unverändert ist und α , β und γ neue Konstanten sind, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}\alpha &= M_{\text{Neutron}} - \left(a_{\text{Vol}} - a_{\text{Asymm}} - a_{\text{Oberfl}} \cdot \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}} \right) \\ \beta &= - \left(4a_{\text{Asymm}} + (M_{\text{Neutron}} - M_{\text{H}}) \right) \\ \gamma &= 4a_{\text{Asymm}} \cdot \frac{1}{A} + a_{\text{Coulomb}} \cdot \frac{1}{A^{\frac{2}{3}}}.\end{aligned}$$

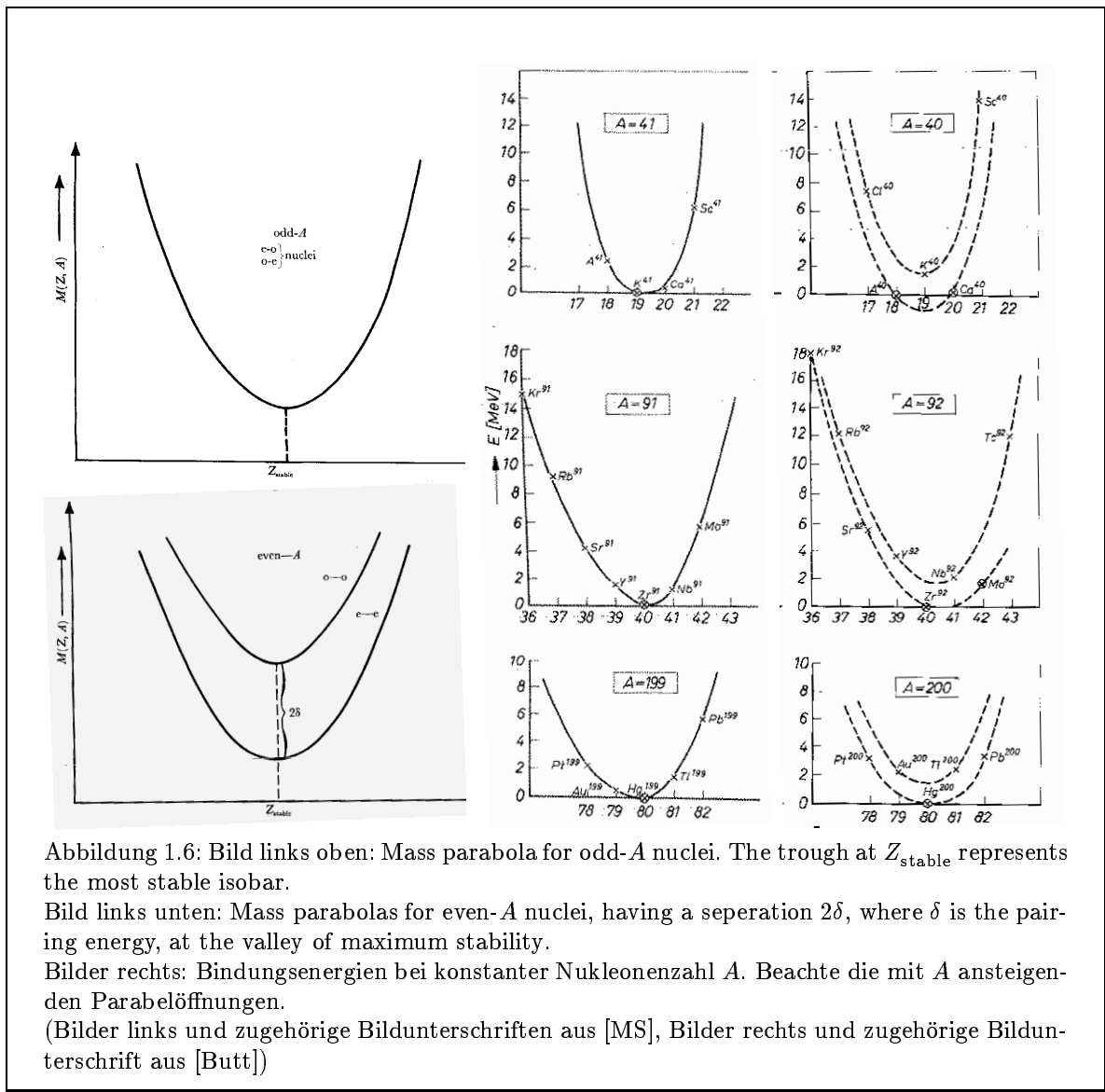


Abbildung 1.6: Bild links oben: Mass parabola for odd- A nuclei. The trough at Z_{stabil} represents the most stable isobar.

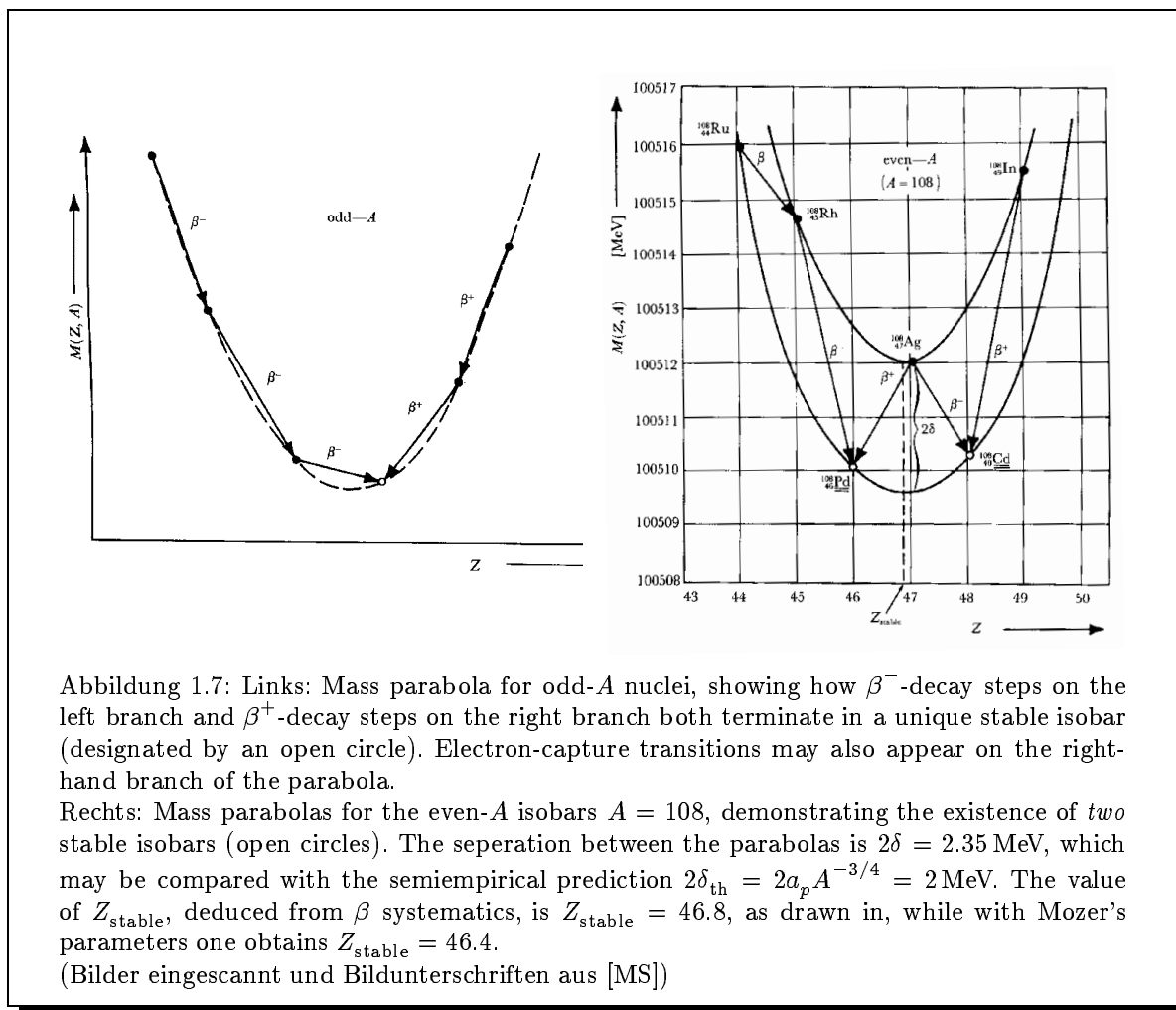
Bild links unten: Mass parabolas for even- A nuclei, having a separation 2δ , where δ is the pairing energy, at the valley of maximum stability.

Bilder rechts: Bindungsenergien bei konstanter Nukleonenzahl A . Beachte die mit A ansteigenden Parabelöffnungen.

(Bilder links und zugehörige Bildunterschriften aus [MS], Bilder rechts und zugehörige Bildunterschrift aus [Butt])

Um $M(Z, A)$ bei konstantem A als Funktion von Z aufzutragen, sind zwei Fälle zu unterscheiden: Bei ug - und gu -Kernen (also A ungerade) ist $\delta = 0$ und man erhält *eine* Parabel. Im zweiten Fall (A gerade) zeichnet man *zwei* Parabeln in eine Grafik: Bei uu -Kernen ist in der Massenformel $+\delta$ einzusetzen, bei gg -Kernen $-\delta$. Da bei β -Zerfällen immer uu -Kerne in gg -Kerne verwandelt werden und umgekehrt, ist es gerechtfertigt, beide Parabeln in eine Grafik zu zeichnen; die Parabeln haben einen Abstand von 2δ (an der Stelle des Minimums). Um das Minimum der Parabeln zu bestimmen, differenziert man: $(\frac{\partial M}{\partial Z})_A \Big|_{Z_{\text{stabil}}} = \beta + 2\gamma \cdot Z_{\text{stabil}} \stackrel{!}{=} 0$. Man erhält also $Z_{\text{stabil}} = -\frac{\beta}{2\gamma}$. Wir haben in Abbildung 1.6 jeweils den Prototypen für beide Fälle und reale Elemente für jeweils drei Beispielmassenzahlen eingescannt.

Jedes Isobar, dessen Masse größer ist als die eines seiner direkten Nachbarn (Nachbar in bezug auf Kernladungszahl Z , evtl. also nicht Nachbar auf Parabel), wandelt sich per β -Zerfall um. Dabei nimmt die Kernladungszahl bei β^- -Zerfall um 1 zu, bei β^+ -Zerfall um 1 ab. Bei Kernen mit ungeradem A gibt es



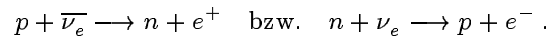
somit nur *ein* stabiles Isobar. Die Kerne, die auf dem linken Parabelast liegen, zerfallen solange über β^- -Zerfall, bis sie dieser stabile Kern sind. Und die Kerne auf dem rechten Parabelast zerfallen ebenso, aber über den β^+ -Zerfall (bzw. über den Elektroneneinfang, falls nötig). Bei Kernen mit geradem A entsteht durch β -Zerfall aus einem gg -Kern ein uu -Kern und umgekehrt. Die Zerfallsschritte führen abwechselnd zwischen der oberen und unteren Parabel hin und her. Auf diese Weise enden die Zerfallsketten stets auf der unteren Parabel; es gibt keine stabilen uu -Kerne (mit Ausnahme von 4 Kernen, die sehr leicht sind und daher nicht richtig durch die Massenformel beschrieben werden). Es kann aber nun mehr als ein stabiles gg -Isobar geben (i. a. 2 oder 3) für vorgegebenes A . In diesen Fällen existieren uu -Kerne, die sowohl mittels β^- -Zerfall als auch durch β^+ -Zerfall zerfallen können. Diese Beschreibung in Worten kann der geneigte Leser sich nochmal an Abbildung 1.7 klar machen. In Bildern sind die eben beschriebenen Tatsachen unseres Erachtens sowieso deutlicher zu sehen.

1.4 Das Neutrino

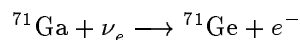
Wir haben bereits erwähnt, daß bei allen β -Zerfällen eine Art der Neutrinos entsteht. Würden keine Neutrinos entstehen, so hätte man Zweiteilchenzerfälle beim β^- - und β^+ -Zerfall. Das würde aber

bedeuten, daß die Energie- und Impulsverteilungen der Elektronen bzw. Positronen festgelegt wären und man daher ein Linienspektrum detektieren würde. Empirisch hat sich aber erwiesen, daß man ein kontinuierliches Spektrum, wie wir es noch beschreiben werden, detektiert. Wenn man also nicht davon ausgehen möchte, daß der Energie- und der Impulserhaltungssatz verletzt werden, bleibt einem nur die Hypothese, die Pauli 1930 vorschlug: Er postulierte, daß ein weiteres Teilchen Energie davonträgt, das *Neutrino*.

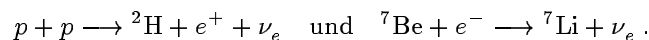
Diese Hypothese war kühn, insbesondere da es 25 Jahre dauerte, das Neutrino direkt nachzuweisen¹. Der direkte Nachweis gelingt über den sogenannten *inversen β -Zerfall*:



Diese Reaktionen werden also einzig durch die Existenz des Neutrinos/Antineutrinos ausgelöst. Auf die Einzelheiten der ersten Nachweis-Experimente mit Antineutrinos aus Kernreaktoren über die erste Reaktionsgleichung wollen wir hier nicht näher eingehen. Wir wollen stattdessen noch kurz ein aktuelles Experiment andeuten: Das GALLEX-Experiment. Bei diesem Experiment befindet sich eine Unmenge von GaCl₃ in Tanks, die unterirdisch im Gran-Sasso-Massiv in Italien aufgebaut sind. Man versucht hier, durch die der 2. Reaktionsgleichung folgende Reaktion



Neutrinos nachzuweisen, die von der Sonne ausgestrahlt werden. In der Sonne entstehen, dem Standardmodell zufolge, z. B. über folgende Reaktionen die Elektronenneutrinos:



Bereits früher versuchte man einen Nachweis der höherenergetischen Neutrinos aus dem Be-Zerfall über die Reaktion ${}^{37}\text{Cl} + \nu_e \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$. All diese Dinge sind ausführlicher in einem Übersichtsartikel in den Physikalischen Blättern beschrieben, auf den wir hier (und im folgenden noch einige Male) verweisen möchten: [PhBl].

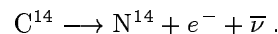
Bei den von uns beschriebenen Zerfällen treten nur Elektronenneutrinos und Anti-Elektronenneutrinos auf. Neben diesen beiden Teilchen existieren auch noch Neutrinos zu dem Myon μ^- und dem τ -Teilchen τ^- (Tauon) und die zugehörigen Anti-Neutrinos, insgesamt gibt es also 3 Neutrinos und 3 Anti-Neutrinos. Man zählt alle Neutrinos zu den Leptonen, zu denen auch die Elektronen, die Myonen, die τ -Teilchen und deren Antiteilchen gehören. Man vergleiche erneut mit [PhBl]; dort ist auch ein Experiment erwähnt, das zeigt, daß genau 3 leichte Neutrinos existieren und nicht etwa noch mehr.

Der Nachweis der Neutrinos ist so schwierig, weil diese Teilchen kaum mit sonstiger Materie reagieren, mit Ausnahme des inversen β -Zerfalls. Diese Reaktion und die sonstigen β -Zerfälle sind Effekte der schwachen Wechselwirkung. Das Neutrino nimmt also an der schwachen Wechselwirkung teil. Es hat sogar den wesentlichen Anteil an der Erforschung dieser Wechselwirkung eingenommen. Da es aber sonst nicht mit Materie reagiert, kann man also schließen, daß das Neutrino elektrisch neutral sein muß, denn die elektrische Ladung ist quantisiert; es kann also nicht sein, daß sie nur zu klein ist, um bemerkt zu werden. Das magnetische Moment muß sehr klein oder gleich Null sein; genauere Daten findet man wieder in [PhBl]. Man kann also fast sagen, daß das Neutrino kein magnetisches Moment trägt, also nicht an der elektromagnetischen Wechselwirkung teilnimmt. Ebenso nimmt es nicht an der starken Wechselwirkung teil, hat also keine Farbe. Nun ist da noch die Gravitationswechselwirkung. An dieser nimmt das Neutrino zumindest kaum teil, vielleicht auch gar nicht: Man hat bis heute die Masse des Elektron-Neutrinos nur nach oben hin abschätzen können. Man weiß heute, daß das Neutrino eine Masse kleiner 30 eV besitzt (bei uns ist immer Masse gleich Ruhmasse, vgl. [FP-5]). Wenn man zusätzlich noch

¹ Alle anderen „Nachweise“ sind indirekt, d. h. derart, daß man z. B. feststellt, daß irgendein Erhaltungssatz verletzt ist. Das allein kann aber nicht die Existenz von irgendwas beweisen.

ein paar Annahmen über das Verhalten der verschiedenen Neutrinos untereinander macht (Neutrino-Mischen, siehe: [PhBl]), kann man die Obergrenze für die Masse noch etwas hinunterdrücken, nämlich unter 7,2 eV (die Werte für die anderen Neutrinos stehen in [PhBl] (langsam wird's langweilig...)); diese Zahl sinkt derzeit immer wieder durch das bereits erwähnte GALLEX-Experiment. Wird sie immer weiter sinken? Wer weiß.

Aber das Neutrino rettet nicht nur den Energie- und den Impulserhaltungssatz. Auch der Drehimpulserhaltungssatz wäre ohne das Neutrino verloren. Über die Gesamtspins der Kerne haben wir schon in Versuch 5 [FP-5] (der geht über γ -Strahlung; diese unterliegt ja entsprechenden Auswahlregeln) einiges gesagt. Betrachten wir also folgenden Zerfall:



Man kann herausfinden, daß der Kohlenstoff den Spin 0 besitzt (ist ein gg -Kern), der Stickstoff Spin 1 und bekannterweise besitzt das Elektron Spin $\frac{1}{2}$. Ohne Neutrino wäre diese Konstellation nach herkömmlicher Quantenmechanik nicht möglich. Aber da ist ja noch das Neutrino: Wenn es halbzahligen Spin hat, ist alles in Ordnung. Man kann bestimmen, daß das Neutrino Spin $\frac{1}{2}$ haben muß.

Wenn die Masse des Neutrinos genau Null ist, so besteht der entscheidende Unterschied zwischen Neutrino und Photon darin, daß ersteres halbzahligen Spin hat, also ein Fermion ist, und letzteres ganzzahligen Spin hat und somit ein Boson ist. Diese Betrachtungen sollten an dieser Stelle genügen. Noch viel mehr, z. B. über die sogenannte Helizität des Neutrinos, ob es Majorana- oder Dirac-Teilchen ist und die ebenfalls noch unbekanntene Lebensdauer, findet man (wie sollte es anders sein?) in [PhBl]. Wir wollen uns nun wieder den Kernen zuwenden und erläutern, mit welchen Möglichkeiten sie die Energie des angeregten Zustands des Tochterkerns abstrahlen und zu deren Grundzustand übergehen.

1.5 Innere Konversion und γ -Zerfälle

Der Tochterkern des β -Zerfalls ist i. a. in einem angeregten Zustand. Um in den Grundzustand oder einen niederenergetischeren angeregten Zustand zu gelangen, muß der Kern nun die Energiedifferenz ΔE loswerden. In Versuch 5 [FP-5] haben wir ausführlich eine Möglichkeit dazu diskutiert: die Ausstrahlung von γ -Strahlung. Die γ -Quanten, die unter Beachtung der Auswahlregeln ausgestrahlt werden, haben also diskrete Energien, die wir E_γ nennen wollen und für die gilt (siehe [FP-5]):

$$E_\gamma = M(Z, A) \cdot c^2 \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{M(Z, A) \cdot c^2}} \right) = \Delta E \cdot \left(1 - \frac{\Delta E}{2M(Z, A) \cdot c^2} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\Delta E}{M(Z, A)} \right)^2 \right) \right) \approx \Delta E,$$

wobei die letzte Näherung aufgrund der schweren Kernmassen gerechtfertigt ist.

Nun existiert aber noch ein Konkurrenzprozeß zu dem γ -Zerfall: die *innere Konversion*. Hierbei gibt der angeregte Kern seine überschüssige Energie direkt an ein Hüllenelektron ab. Das ist wiederum — wie beim Elektroneneinfang — dadurch möglich, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen am Kernort nicht Null ist. Ganz nebenbei bemerkt wären diese beiden Effekte im Bohr'schen Atommodell nicht möglich, da dort die Elektronen niemals in der Nähe des Kerns sind; die Existenz von Elektroneneinfang und innerer Konversion zeigt also, daß das wellenmechanische Atommodell ein besseres Modell ist. Da also die Elektronen auch am Kernort vorkommen können, stoßen sie gewissermaßen mit dem energiereichen Kern, übernehmen dessen Energie und werden aus dem Atom geschleudert. Welche kinetische Energie besitzen die Elektronen? Dazu nutzen wir den Energieerhaltungssatz im Ruhesystem des angeregten Kerns

$$\Delta E = E_{\text{kin, Kern}} + E_{\text{kin, Elektron}} + E_{\text{Bindung}},$$

wobei E_{Bindung} die jeweils zu der Schale, aus der das Elektron kommt, gehörende Bindungsenergie ist. Weiterhin gilt der Impulserhaltungssatz, der quadriert folgende Form besitzt:

$$2M(Z, A) \cdot E_{\text{kin, Kern}} = 2m_e \cdot E_{\text{kin, Elektron}}.$$

Damit gilt $\Delta E = E_{\text{kin, Elektron}} \cdot \left(1 + \frac{m_e}{M(Z, A)}\right) + E_{\text{Bindung}}$ und wir folgern:

$$E_{\text{kin, Elektron}} = \frac{M(Z, A)}{M(Z, A) + m_e} \cdot (\Delta E - E_{\text{Bindung}}) \approx \Delta E - E_{\text{Bindung}},$$

wobei die letzte Näherung wegen $M(Z, A) \gg m_e$ sinnvoll ist.

Da es für E_{Bindung} mehrere mögliche, diskrete Werte gibt, je nach der Schale, aus der das Elektron emittiert wird, besteht das Spektrum der inneren Konversion aus einzelnen Linien. Anschließend an den Konversionsprozeß fehlt ein Elektron in einer inneren Elektronenschale, so daß Röntgenstrahlung und Auger-Elektronenemission (das sind die Analoga zu der γ -Strahlung und der inneren Konversion, nur daß hier die Hülle und nicht der Kern einen angeregten Zustand abreagiert) zusammen mit der inneren Konversion auftreten.

Wir definieren nun den sogenannten *Konversionskoeffizienten* über

$$\alpha := \frac{\text{Zahl der pro Zeiteinheit emittierten Elektronen}}{\text{Zahl der pro Zeiteinheit emittierten } \gamma\text{-Quanten}}.$$

Man kann entsprechend auch partielle Konversionskoeffizienten α_K , α_L , usw. definieren, wenn man nur die Elektronen, die aus der K -Schale, L -Schale, usw. kommen, zählt.

Die Übergänge der inneren Konversion gehorchen den gleichen Auswahlregeln wie die γ -Strahlung (vgl. [FP-5]); allerdings mit einer Ausnahme: Der $0 \rightarrow 0$ -Übergang, der bei der γ -Strahlung nicht möglich war, weil das Photon Spin 1 besitzt und daher die Drehimpulserhaltung nicht gewährleistet wäre, ist hier möglich, da ja gar kein neues Teilchen entsteht und alle alten ihre Spins behalten.

Theoretisch ergibt sich für die Konversionskoeffizienten α_K nach [Butt] (dabei ist: l : Multipolordnung des Übergangs, α : Feinstrukturkonstante, (e) bzw. (m) : elektrischer bzw. magnetischer Multipolübergang (vgl. [FP-5])):

$$\begin{aligned} \alpha_K^{(e)} &= \alpha^4 \cdot \frac{l}{l+1} \cdot Z^3 \cdot \left(\frac{2m_e c^2}{\Delta E}\right)^{l+\frac{5}{2}} \\ \alpha_K^{(m)} &= \alpha^4 \cdot Z^3 \cdot \left(\frac{2m_e c^2}{\Delta E}\right)^{l+\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

1.6 Das β -Spektrum

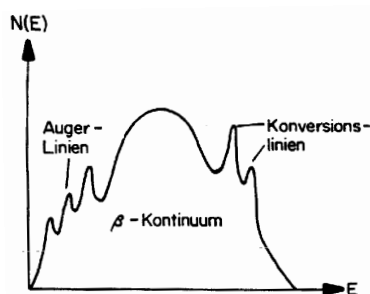
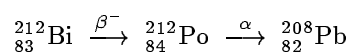


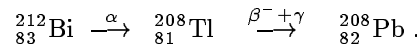
Abb. 1.8: Das β -Spektrum

Im Experiment mißt man nebenstehendes β -Spektrum. Die Herkunft der Konversionslinien und die der Auger-Linien haben wir im letzten Abschnitt erläutert.

Wir wollen uns nun dem β -Kontinuum widmen. Die Maximalenergie des Kontinuums, die wir mit \mathcal{E} bezeichnen wollen, ist gleich der Zerfallsenergie ΔE , wie wir sie auf Seite 8 im Abschnitt 1.3 berechnet haben (wenn die Neutrinomasse exakt Null ist, sonst müßten wir noch die Masse des Neutrinos abziehen). Sie liegt also an der Stelle, an der man, wenn es keine Neutrinos geben würde, das *Linienspektrum* der emittierten β -Teilchen erwarten würde. Als man die Neutrinos noch nicht kannte oder postuliert hatte, konnte man das kontinuierliche β -Spektrum nur durch eine Verletzung des Energieerhaltungssatzes erklären. Gegen eine solche Verletzung sprach aber folgendes: Bismut kann auf verschiedene Arten zerfallen:



und



Wenn man für die Zerfallsenergien der β -Zerfälle jeweils die maximalen Energien des Spektrums nimmt, so sind die Summen der Zerfallsenergien auf beiden Zerfallswegen gleich; in diesem Fall ist die Energie also erhalten. Man kommt also direkt auf die Vermutung, daß irgendwie manchen β -Teilchen Energie abhanden kommt. 1930 postulierte Pauli, daß das Neutrino der Dieb ist. Dazu haben wir ja bereits vorher Genaueres gesagt und berechnen dies jetzt auch quantitativ.

1.6.1 Fermi-Theorie

Wir wollen nun die Fermi-Theorie für die Form des β -Spektrums nachvollziehen. Wir werden sehen, daß man nur mittels Quantentheorie und dem Neutrino-Postulat auf obige Form für das β -Kontinuum kommt. Die Übereinstimmung des Ergebnisses der Fermi-Theorie mit dem experimentellen Befund kann man als ein indirektes Argument für die Existenz des Neutrinos sehen. Wir werden im folgenden immer von Elektron und Neutrino sprechen; wir meinen damit immer die richtige Kombination Positron/Neutrino bzw. Elektron/Antineutrino.

Idee und Vorbetrachtungen

Wir beschreiben den β -Zerfall mittels eines Hamiltonoperators $H^{(1)}$ und betrachten ihn als kleine Störung des Hamiltonoperators $H^{(0)}$, der das „normale“ Atom, das stabil bleibt, beschreibt. Da $H^{(0)}$ zeitunabhängig ist und wir den von $H^{(1)}$ vermittelten Übergang von einem Zustand $|\psi_i\rangle = |i\rangle$ vorher (stabiles Atom) zu einem (noch nicht bestimmten) Zustand $|\psi_f\rangle = |f\rangle$ nachher (β -zerfallenes Atom, Elektron, Neutrino) an einem festen Zeitpunkt betrachten wollen, können wir unter Ausnutzung der üblichen Störungstheorie einfach die 2. Goldene Regel von Fermi anwenden. Sie lautet²:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \left| \langle f | H^{(1)} | i \rangle \right|^2 \cdot \frac{dn}{d\mathcal{E}} .$$

Dabei ist \mathcal{E} die Maximalenergie des β -Spektrums, $\frac{dn}{d\mathcal{E}}$ ist die Dichte der Endzustände mit kinetischer Energie in dem Energieintervall $[\mathcal{E}, \mathcal{E} + d\mathcal{E}]$ und W ist die Wahrscheinlichkeit für den Übergang $|i\rangle$ nach $|f\rangle$, also für den Zerfall des Kerns. Warum interessieren wir uns an dieser Stelle gerade nur für die Endzustände $|f\rangle$, deren kinetische Energie im Intervall $[\mathcal{E}, \mathcal{E} + d\mathcal{E}]$ liegt? Das System vor dem Zerfall besaß keine kinetische Energie, da wir $|i\rangle$ als *ein* Teilchen (der unzerfallene Kern) in seinem Schwerpunktsystem betrachten. Nun zerfällt dieser Kern in den Endzustand $|f\rangle$, der drei Teilchen beschreibt, das Elektron, das Neutrino und den Kern nach dem Zerfall, und diese 3 Teilchen bekommen den Energiegewinn ΔE von Seite 8 als kinetische Energie mit. Diese ist also festgelegt durch das ΔE , was wir oben schon umbenannt haben in \mathcal{E} . Es ist also sinnvoll, die Endzustände $|f\rangle$ gerade im Intervall $[\mathcal{E}, \mathcal{E} + d\mathcal{E}]$ zu suchen.

Wir wollen uns nun mit dem Zusammenhang zwischen den Energien und Impulsen einzelner Teilchen auseinandersetzen. Es gilt die relativistische Energie-Impuls-Beziehung³ (zur Erinnerung: Bei uns sind alle Massen die Ruhmassen):

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 .$$

Weiterhin kann man die Energie des Teilchens aufspalten in einen Anteil, der der Masse entspricht, und einen kinetischen Anteil: $E = mc^2 + E_{\text{kin}}$. Aus diesen Beziehungen folgt:

$$p = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{(E_{\text{kin}} + mc^2)^2 - m^2 c^4} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot mc^2} . \quad (1.2)$$

²Die Herleitung dieser Formel findet man in jedem Buch über Quantenmechanik; im Buttler [Butt] befindet sich im Anhang ein kurzer Abriß der Störungstheorie und kurze Betrachtungen, wann welche Formel angewendet werden kann.

³Gilt die Störungsrechnung eigentlich *unverändert* in der relativistischen Quantenmechanik? Wir wollen es mal hoffen...

Wir haben nun also schonmal eine Abhängigkeit $p(E_{\text{kin}})$ ermittelt. Für die Umkehrung lösen wir einfach die entstehende quadratische Gleichung $p^2 c^2 = E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot mc^2$ auf; nur die positive Lösung ist von Interesse, da kinetische Energien immer positiv sind. Es ergibt sich:

$$E_{\text{kin}} = -mc^2 + \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (1.3)$$

Also kennen wir jetzt auch die Abhängigkeit $E_{\text{kin}}(p)$. Beide Beziehungen, Glg. (1.2) und Glg. (1.3), werden wir im folgenden noch sehr häufig gebrauchen.

Der Endzustand $|f\rangle$ sei nun dadurch charakterisiert, daß der *Impuls des Elektrons* im Intervall $[p, p+dp]$ liegt. Mit anderen Worten beschreibt dann die Wahrscheinlichkeit W gerade die Wahrscheinlichkeit $N(p) dp$, daß ein β -Teilchen emittiert wird, dessen Impuls in besagtem Intervall liegt. Also schreiben wir:

$$N(p) dp = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \left| \langle f | H^{(1)} | i \rangle \right|^2 \cdot \frac{dn}{d\mathcal{E}}.$$

Ganz analog hätten wir (z. B. über die Gleichung (1.3)) fordern können, daß die *kinetische Energie des Elektrons* in einem bestimmten Intervall liegt. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $N(E_{\text{kin}}) dE_{\text{kin}}$, daß ein β -Teilchen emittiert wird, dessen Energie in besagtem Intervall liegt, gilt nach Substitutionsregel mit Glg. (1.2):

$$N(E_{\text{kin}}) dE_{\text{kin}} = N(E_{\text{kin}}(p)) \frac{dE_{\text{kin}}}{dp} dp = N(p) dp.$$

Hiermit, den Gleichungen (1.2) und (1.3) und den daraus folgenden Ableitungen $\frac{dE_{\text{kin}}}{dp}$ und $\frac{dp}{dE_{\text{kin}}}$ ist es also ein leichtes, von Energien und den Energieverteilungen auf Impulse und die Impulsverteilungen umzurechnen. Wir werden deshalb stellenweise, um die folgenden Formeln einfacher schreiben zu können, gleichzeitig E_{kin} und p in einer Formel verwenden. Man muß dann halt nur im Hinterkopf behalten, daß die E_{kin} und p auch noch von der jeweils anderen Größe abhängen und nicht einfache Parameter sind.

Für den Betrag des Matrixelements $|H_{if}^{(1)}| := \left| \langle f | H^{(1)} | i \rangle \right|$ nehmen wir an, daß er einen kleinen Wert annimmt, weil die Wechselwirkung schwach ist, und daß er eine von Energie und Impuls unabhängige Konstante ist. Wir werden später nochmal kurz darauf eingehen, daß für unsere Fälle sogenannte *erlaubte Übergänge* vorliegen und daher diese Annahme gerechtfertigt ist. Um $N(p) dp$ angeben zu können, fehlt uns also nur noch ein Ausdruck für $\frac{dn}{d\mathcal{E}}$, dem sogenannten *statistischen Faktor*.

Statistischer Faktor

Um einen Ausdruck für den statistischen Faktor zu gewinnen, bestimmen wir zunächst ganz allgemein die Zahl der Zustände, die in einem Volumen $d^3 r$ und einem Intervall $[p, p+dp]$ zu finden sind: Aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation gilt (wie üblich in der Quantenmechanik):

$$dn_{\text{Teilchen}} = \frac{d^3 r}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p = \frac{d^3 r}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot p^2 dp.$$

Für das Volumen $V := d^3 r$ setzt man nun das Kernvolumen ein, in dem das Elektron und das Neutrino noch von der schwachen Wechselwirkung beeinflusst sind. Außerhalb von V können die beiden Teilchen dann als wechselwirkungsfrei angesehen werden, mit Ausnahme des Elektrons bezüglich der Coulombwechselwirkung. Mit dieser Wechselwirkung befassen wir uns später gesondert.

Nun gilt obige Gleichung für dn sowohl für Elektronen als auch für Neutrinos:

$$dn_e = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot p_e^2 dp_e \quad \text{und} \quad dn_\nu = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot p_\nu^2 dp_\nu.$$

Für den zerfallenen Kern nehmen wir an, daß er so schwer ist, daß er weiterhin ruht, also keinen Impuls und keine kinetische Energie übernommen hat. Natürlich hängen dann die beiden Impulse p_ν und $p := p_e$ voneinander ab. Wenn wir diese Abhängigkeit gefunden und eingesetzt haben, so können wir sagen, daß $dn = dn_e \cdot dn_\nu$ die Zahl der Zustände ist, bei denen man beide Teilchen in Impulsintervallen antrifft,

die mit der β -Emission von $|f\rangle$ verträglich sind. Wir werden nun also dn_e und dn_ν multiplizieren, dp_ν substituieren mittels $dp_\nu = \frac{dp_\nu}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E}$ und durch $d\mathcal{E}$ dividieren:

$$\frac{dn}{d\mathcal{E}} = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6} \cdot p^2 \cdot p_\nu^2 \cdot \frac{dp_\nu}{d\mathcal{E}} \cdot dp.$$

Mittels Gleichung (1.2) gilt für das Neutrino: $p_\nu = \frac{\sqrt{E_{\nu,\text{kin}}^2 + 2E_{\nu,\text{kin}} \cdot m_\nu c^2}}{c}$. Wir berechnen hieraus den Ausdruck $p_\nu^2 \cdot \frac{dp_\nu}{dE_{\nu,\text{kin}}}$. Es ergibt sich:

$$p_\nu^2 \cdot \frac{dp_\nu}{dE_{\nu,\text{kin}}} = \frac{E_{\nu,\text{kin}}^2 + 2E_{\nu,\text{kin}} \cdot m_\nu c^2}{c^2} \cdot \frac{E_{\nu,\text{kin}} + m_\nu c^2}{c \cdot \sqrt{E_{\nu,\text{kin}}^2 + 2E_{\nu,\text{kin}} \cdot m_\nu c^2}} = \frac{\sqrt{E_{\nu,\text{kin}} \cdot (E_{\nu,\text{kin}} + 2m_\nu c^2)}}{c^3} \cdot (E_{\nu,\text{kin}} + m_\nu c^2).$$

Die gesamte Zerfallsenergie verteilt sich nun auf das Elektron und das Neutrino; dann gilt mit E_{kin} für die kinetische Energie des Elektrons:

$$\mathcal{E} = E_{\text{kin}} + E_{\nu,\text{kin}} + m_\nu c^2. \quad (1.4)$$

Wir sehen also, daß unsere Aussage, daß sich die Zerfallsenergie *ganz* auf die kinetischen Energien verteilt, ein bisschen geschummelt war. Aber die Masse des Neutrinos ist so klein, daß wir nur noch eine gewisse Zeit mit m_ν rechnen werden; dann werden wir die Masse des Neutrinos gleich Null setzen, weil der Term, der durch die Masse zusätzlich mitgeschleppt werden muß, kaum eine Korrektur bewirkt, also eigentlich nur lästig ist.

Anhand Gleichung (1.4) sehen wir, daß $\frac{dE_{\nu,\text{kin}}}{d\mathcal{E}} = 1$ gilt, also gilt $p_\nu^2 \cdot \frac{dp_\nu}{dE_{\nu,\text{kin}}} = p_\nu^2 \cdot \frac{dp_\nu}{d\mathcal{E}}$. Wenn wir nun geeignet $E_{\nu,\text{kin}}$ in obigem Ausdruck für $p_\nu^2 \cdot \frac{dp_\nu}{d\mathcal{E}}$ ersetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} p_\nu^2 \cdot \left(\frac{dp_\nu}{d\mathcal{E}} \right) &= \frac{1}{c^3} \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}}) \cdot \sqrt{(\mathcal{E} - E_{\text{kin}} - m_\nu c^2) \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}} + m_\nu c^2)} \\ &= \frac{1}{c^3} \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}}) \cdot \sqrt{(\mathcal{E} - E_{\text{kin}})^2 - m_\nu^2 c^4} \\ &= \frac{1}{c^3} \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}})^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{\mathcal{E} - E_{\text{kin}}} \right)^2}. \end{aligned}$$

Dies können wir zunächst in unseren statistischen Faktor einsetzen, so daß sich

$$\frac{dn}{d\mathcal{E}} = \frac{V^2}{4c^3 \pi^4 \hbar^6} \cdot p^2 \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}})^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{\mathcal{E} - E_{\text{kin}}} \right)^2} dp$$

ergibt. Da wir $|H_{if}^{(1)}|$ in unseren Fällen als kleinen konstanten Wert betrachten, ergibt sich nun für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $N(p)$ mit einer Konstanten C_1 :

$$N(p) dp = C_1 \cdot p^2 \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}})^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{\mathcal{E} - E_{\text{kin}}} \right)^2} dp. \quad (1.5)$$

Im folgenden rechnen wir mit $m_\nu = 0$, sodaß die letzte Wurzel einfach wegfällt.

Bevor wir in diesem Ausdruck das p oder das E_{kin} eliminieren, beschäftigen wir uns noch mit der Korrektur, die durch die Coulombwechselwirkung nötig wird.

Coulomb-Korrektur

Infolge der Coulombwechselwirkung mit der Kernladung (die Abschirmung durch die Elektronenhülle bleibt vernachlässigt) werden die emittierten Elektronen gebremst und die emittierten Positronen beschleunigt. Wie beeinflusst das jetzt das Spektrum?

Dazu analysieren wir unsere Formel (1.5): Das $p^2 dp$ bezieht sich auf den Impuls des Elektrons/Positrons direkt am Kern, denn es stammt ja aus der Heisenberg'schen Unschärferelation für das Kernvolumen V . Andererseits bezieht sich das \mathcal{E} in dem Term $(\mathcal{E} - E_{\text{kin}})^2$ auf vom Kern weit entfernte Teilchen, denn diese Größe stammt aus der Berechnung der Bindungsenergieunterschiede. Bindungsenergien beziehen sich definitionsgemäß auf die Zerlegung des Kerns in freie Teilchen, und frei sind diese erst, wenn sie nicht mehr der Coulombkraft unterliegen. Auch das p in $N(p) dp$ bezieht sich auf den Elektronen- bzw. Positronenimpuls, wenn diese schon weit entfernt sind vom Kern: Diese Größe wird nämlich erst im Detektor gemessen. Also wird der Term $p^2 dp$ dafür sorgen, daß wir Korrekturen anbringen müssen; der p -Anteil aus dem \mathcal{E} -Term braucht nicht korrigiert werden.

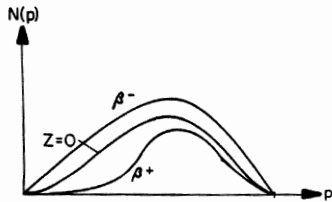


Abb. 1.9: Die Coulombkorrektur der β -Spektren (eingescannt aus [Mar])

genau diesen Impuls im Detektor, denn diese Größe stammte ja aus den Bindungsenergieunterschieden und somit von einem vom Kern weit entfernten Ort. Hier bewirkt also der Term $(\mathcal{E} - E_{\text{kin}})^2$, daß die obere Grenze des Spektrums nicht verschoben wird; es wirkt sich aus, daß ein Teil der Formel nicht korrigiert zu werden braucht. Aber auch der korrigierende Teil wirkt verschieden stark: Es ist nämlich anschaulich, daß die Änderung des Impulses im Coulombfeld umso stärker wirkt, je langsamer das β -Teilchen ist. Die Störung ist dementsprechend am unteren Ende am stärksten. Wir haben die meßbaren Verformungen auch nochmal in Abbildung 1.9 dargestellt.

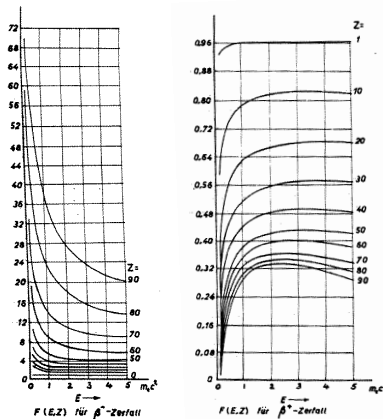


Abb. 1.10: Die Fermi-Funktionen (eingescannt aus [Mar])

Auf die Beeinflussung des Spektrums schließen wir nun folgendermaßen: Wir geben einen Impuls p vor, dessen $N(p)$ wir messen wollen. Wenn wir ein Positron messen wollen, so wird dessen Impuls auf dem Weg zum Detektor ja vergrößert, da es abgestoßen wird. Bei dem Zerfall hatte es also einen kleineren Impuls als wir ohne Korrektur in die Formel (1.5) einsetzen würden. Aus diesem Grunde ist also das wirkliche gemessene $N(p)$ kleiner als das erwartete berechnete. Beim Elektron, das ja vom Kern abgebremst wird, verhält es sich umgekehrt: Beim Zerfall hatte es einen größeren Impuls als den in Formel (1.5) eingesetzten; das gemessene $N(p)$ ist größer als das berechnete. Wirkt dieser Effekt für alle p gleich stark? Sicherlich nicht: Wenn wir genau den Impuls für \mathcal{E} vorgeben, so hat das Elektron oder Positron

genau diesen Impuls im Detektor, denn diese Größe stammte ja aus den Bindungsenergieunterschieden und somit von einem vom Kern weit entfernten Ort. Hier bewirkt also der Term $(\mathcal{E} - E_{\text{kin}})^2$, daß die obere Grenze des Spektrums nicht verschoben wird; es wirkt sich aus, daß ein Teil der Formel nicht korrigiert zu werden braucht. Aber auch der korrigierende Teil wirkt verschieden stark: Es ist nämlich anschaulich, daß die Änderung des Impulses im Coulombfeld umso stärker wirkt, je langsamer das β -Teilchen ist. Die Störung ist dementsprechend am unteren Ende am stärksten. Wir haben die meßbaren Verformungen auch nochmal in Abbildung 1.9 dargestellt.

$$F_{\pm}(E_{\text{kin}}, Z) = \frac{\kappa}{1 - e^{-\kappa}} \quad \text{mit } \kappa = \mp \frac{2\pi Z}{137} \cdot \frac{E_{\text{kin}} + m_e c^2}{pc}.$$

Wir haben einige Fermi-Funktionen eingescannt, die in Abbildung 1.10 zu sehen sind.

Um im folgenden korrekt zu rechnen, modifizieren wir also unsere Formel (1.5) zu:

$$N(p) dp = C_1 \cdot F_{\pm}(E_{\text{kin}}, Z) \cdot p^2 \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}})^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{\mathcal{E} - E_{\text{kin}}}\right)^2} dp. \quad (1.6)$$

1.6.2 Der Kurie-Plot

Der Vollständigkeit halber eliminieren wir nun in Formel (1.6) die energieabhängigen Terme, indem wir Gleichung (1.3) einsetzen. Es ergibt sich:

$$N(p) dp = C_1 \cdot \widetilde{F}_{\pm}(p, Z) \cdot p^2 \cdot \left(\mathcal{E} + m_e c^2 - \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{\mathcal{E} + m_e c^2 - \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}} \right)^2} dp,$$

mit $\widetilde{F}_{\pm}(p, Z) := F(-m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2})$.

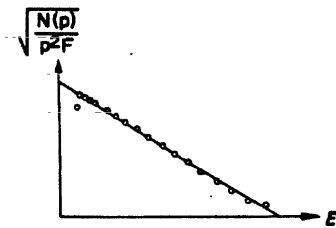


Abb. 1.11: Ein Kurie-Plot (eingescannt aus [Mar])

Wir benötigen diese Form der Formel aber überhaupt nicht im folgenden. Stattdessen bilden wir für $m_\nu = 0$ folgende Funktion und tragen sie gegen die Energie E_{kin} auf:

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 \cdot F_{\pm}(E_{\text{kin}}, Z)}} = C_2 \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}}),$$

wobei $C_2 = \sqrt{C_1}$ ist. Wie wir auch in nebenstehender Abbildung 1.11 erkennen können, ergibt sich bei einem β -Spektrum eine Gerade. Dieses Diagramm heißt *Kurie-Diagramm* (das hat nichts mit den Geschwistern Curie zu tun). Wie immer bietet eine solche Geradendarstellung die beste Möglichkeit, ein gemessenes β -Spektrum

daraufhin zu überprüfen, ob es mit unserer Fermi-Theorie übereinstimmt.

Ist das Spektrum aus mehreren Zerfällen zusammengesetzt, so erscheint im Kurie-Diagramm ein Knick, wie man auch in Abbildung 1.12 sehen kann. In einem gemessenen β -Kontinuum hätte man da deutlich mehr Schwierigkeiten, diese mehrfachen β -Zerfälle überhaupt zu bemerken, geschweige denn zu trennen. Bei dem Kurie-Plot muß man nur beachten, daß man die Geraden zu den hochenergetischen β -Zerfällen nach kleinen Energien extrapoliert (bei Geraden ist das ja keine Schwierigkeit...), die counts der niederenergetischen β -Zerfälle von den hochenergetischen counts bereinigt und damit neue Geraden zu den niederenergetischen Zerfällen bestimmt.

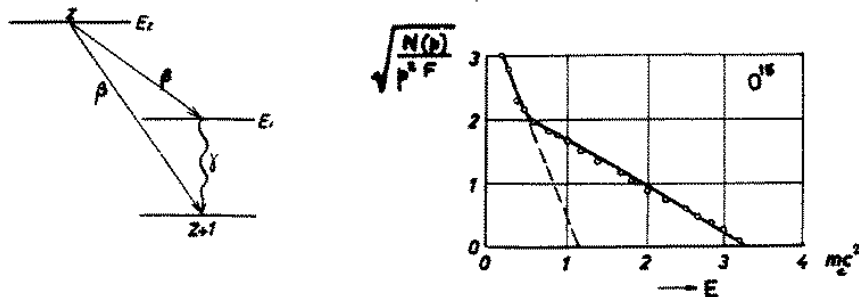


Abbildung 1.12: Kurie-Plot zweier β -Zerfälle (eingescannt aus [Mar])

Ein weiterer Vorteil der Kurie-Plot-Auftragung ist der, daß man sehr leicht durch die Schnittpunkte der Geraden mit der E -Achse die maximalen Energien \mathcal{E} ablesen kann. Im β -Kontinuum sind die Zählraten bei dieser Energie so schwach, daß man nur ein Ratespiel veranstalten könnte. Ohne Korrektur der niederenergetischen Geraden würde man aber eine falsche Maximalenergie für diesen Zerfall ablesen. Die gestrichelte Verlängerung in Abbildung 1.12 dient also nur der optischen Unterstützung, um die erste Gerade besser zu sehen, nicht dem Ablesen der Maximalenergie.

Da wir praktisch weder $N(p)$ noch p direkt messen werden, ist es sinnvoll die Funktion zur Kurie-Auftragung nur in Abhängigkeit der Energien E_{kin} zu schreiben. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} C_2 \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}}) &= \sqrt{\frac{N(p)}{p^2 \cdot F_{\pm}(E_{\text{kin}}, Z)}} = \sqrt{\frac{N(E_{\text{kin}}) \frac{dE_{\text{kin}}}{dp}}{p^2 \cdot F_{\pm}(E_{\text{kin}}, Z)}} \\ &= \sqrt{\frac{N(E_{\text{kin}}) \cdot c^2}{p \cdot \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} \cdot F_{\pm}(E_{\text{kin}}, Z)}} \\ &= \sqrt{\frac{N(E_{\text{kin}}) \cdot c^3}{F_{\pm}(E_{\text{kin}}, Z) \cdot \sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot m_e c^2} \cdot (E_{\text{kin}} + m_e c^2)}}. \end{aligned}$$

Wir ziehen nun noch den Term $\sqrt{c^3}$ in die Konstante hinein, also $C_3 := \frac{C_2}{\sqrt{c^3}}$, und setzen für $m_e c^2$ den Wert 511 keV ein. Die kinetische Energie ist dann natürlich auch in keV einzusetzen. Das Ergebnis ist dann:

$$\sqrt{\frac{N(E_{\text{kin}})}{F_{\pm}(E_{\text{kin}}, Z) \cdot \sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot 511} \cdot (E_{\text{kin}} + 511)}} = C_3 \cdot (\mathcal{E} - E_{\text{kin}}).$$

Neutrino-Korrektur

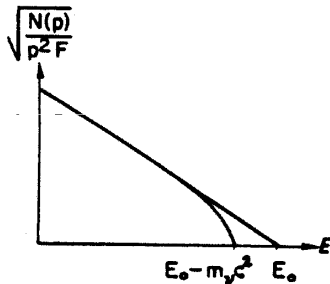


Abb. 1.13: Kurie-Plot bei endlicher Neutrinomasse m_ν (eingescannt aus [Mar])

Hätten wir immer den Neutrinomassen-Wurzelterm mitgeschleppt, so ergäbe sich jetzt bei der obigen Formel eine Korrektur um den Faktor

$$\left[1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{\mathcal{E} - E_{\text{kin}}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Dieser Faktor weicht erst am oberen Ende des Spektrums merklich von Eins ab. Bei $E_{\text{kin}} = \mathcal{E} - m_\nu c^2$ wird er Null, seine Ableitung ist dort unendlich. Also mündet das Kurie-Diagramm für vorhandene Neutrinomasse etwas früher und nicht als Gerade, sondern senkrecht auf der E -Achse. In der Abbildung 1.13 ist diese Abweichung durch eine eventuelle Neutrinomasse verdeutlicht.

1.6.3 Fermi-Theorie, Teil 2

Erlaubte und unerlaubte Übergänge

Wir wollen hier nochmal auf das Matrixelement $H_{if}^{(1)} := \langle f | H^{(1)} | i \rangle$ eingehen. Dabei beschreibt der Zustand $|i\rangle$ den unzerfallenen Kern. Der Zustand $|f\rangle$ beschreibt das Neutrino, das β -Teilchen und den zerfallenen Kern. Man kann also diesen Zustand durch die einzelnen Zustände der Teilchen zusammensetzen: $|f\rangle = |\phi_e \cdot \phi_\nu \cdot \psi_f\rangle$, wobei $|\phi_e\rangle$ das Elektron/Positron beschreibt, $|\phi_\nu\rangle$ das Neutrino und $|\psi_f\rangle$ den zerfallenen Kern. Weiterhin zerlegt man den Hamiltonoperator zu einem dimensionslosen Operator M und einer empirischen, dimensionsbehafteten Konstanten g , die *Fermi-Konstante* genannt wird: $H^{(1)} = g \cdot M$. Es gilt $g = 1,41 \cdot 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3$. Für das Matrixelement erhält man dann:

$$H_{if}^{(1)} = g \cdot \langle \psi_f \cdot \phi_\nu \cdot \phi_e | M | i \rangle.$$

Infolge der sehr schwachen Wechselwirkung zwischen Kern und β -Teilchen bzw. Neutrino (die Coulombwechselwirkung wird wieder vernachlässigt; wir beachten sie ja im Faktor $F_{\pm}(E_{\text{kin}}, Z)$) lassen sich die Zustände $|\phi_e\rangle$ und $|\phi_\nu\rangle$ in der Ortsdarstellung als ebene Wellen ansetzen:

$$\phi_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \exp(i \cdot (\vec{k}_\nu \cdot \vec{r})) \quad \text{und} \quad \phi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \exp(i \cdot (\vec{k}_e \cdot \vec{r})).$$

Dabei kommt der Faktor $\frac{1}{\sqrt{V}}$ aus der Normierung: Wir normieren die ebenen Wellen nämlich über das Volumen V , weil nur dort der Zustand des zerfallenen Kerns $|\psi_f\rangle$ wesentlich von Null verschieden ist. Aus dem eben genannten Grunde können wir zur Berechnung von $|H_{if}^{(1)}|$ die ebenen Wellen auch taylorentwickeln. Wir erhalten:

$$\phi_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \left[1 + i \cdot (\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}) + \dots \right] \quad \text{und} \quad \phi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \left[1 + (i \cdot (\vec{k}_e \cdot \vec{r}) + \dots) \right].$$

In erster Näherung genügt es, in beiden Fällen nur den ersten konstanten Term aus den Reihen zu berücksichtigen. Für diesen Fall ergibt sich also (dabei ist $|\phi(0)\rangle$ als Symbol für den abstrakten Zustand mit der obigen genäherten konstanten Ortsdarstellung zu verstehen):

$$H_{if}^{(1)} = g \cdot \langle \phi_e(0) \cdot \phi_\nu(0) \cdot \psi_f | M | i \rangle = g \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \psi_f | M | i \right\rangle = \frac{g}{V} \langle \psi_f | M | i \rangle.$$

Wir kürzen nun ab: $M_{if} := \langle \psi_f | M | i \rangle$. $|M_{if}|$ ist somit ein Maß für den Überlapp der Wellenfunktionen der Kerne vor und nach dem Zerfall. Es gilt hiermit also:

$$\left| H_{if}^{(1)} \right|^2 = \frac{g^2}{V^2} \cdot |M_{if}|^2.$$

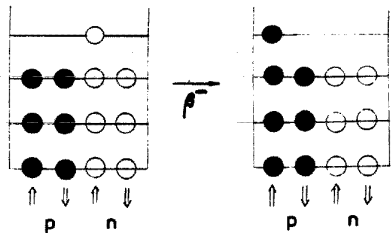


Abb. 1.14: Die Protonen und Neutronen beim Zerfall eines Spiegelkerns (eingescannt aus [Mar])

So, jetzt können wir klassifizieren: Wenn unsere Näherung, nur mit den konstanten Termen der ebenen Wellen zu rechnen, akzeptabel sein soll, muß $|M_{if}|$ von der Größenordnung 1 sein und unabhängig von der Energie E_{kin} . In diesem Fall erfüllt unser $H_{if}^{(1)}$ nämlich auch alle Bedingungen, die wir vor unseren Rechnungen an es gestellt haben (klein, konstant und von E_{kin} unabhängig). Man nennt diesen Fall daher den Zerfall mit *erlaubten Übergängen*. Erlaubte Übergänge trifft man am häufigsten mit relativ kurzen Lebenszeiten, weil diese Zerfälle wahrscheinlicher sind als die verbotenen. Sogenannte *übererlaubte Übergänge* treten auf, wenn die Wellenfunktionen des unzerfallenen und des zerfallenen Kerns besonders gut über-

lappen. Das ist z. B. der Fall bei Spiegelkernen, deren Protonen- und Neutronenzahlen bei einem β -Zerfall ausgetauscht werden; vgl. dazu Abbildung 1.14.

Nun kann es aber vorkommen, daß das $|M_{if}|$ in der Größenordnung 0 liegt. Dann können wir nicht so stark nähern und müssen noch $(\vec{k} \cdot \vec{r})$ -Terme in die Näherung mitnehmen. Je nachdem, wieviele Terme n dieser Sorte mitgenommen werden müssen, um sinnvolles berechnen zu können (was das genau ist, sei in diesem Rahmen offen gelassen), nennt man die Übergänge *n-fach verboten*. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen.

1.7 Szintillationszähler

Abschließend wollen wir kurz etwas zum Szintillationsdetektor sagen. Ausführlich haben wir den Aufbau und seine Funktionsweise bereits in Versuch 5 [FP-5] beschrieben. Hier also nur ein paar β -spezifische Anmerkungen.

Unser Szintillationskristall besteht aus Anthracen $C_{14}H_{10}$, was ein Molekül aus 3 aneinanderhängenden Benzolringen ist. Die Ordnungszahlen der aufbauenden Elemente sind also relativ klein. In Versuch [FP-5] haben wir festgestellt, daß die Wirkungsquerschnitte für die Wechselwirkungen von γ -Strahlen

mit Materie proportional zu Z (Compton-Effekt), Z^2 (Paarbildung) und insbesondere Z^5 (Photoeffekt) sind. Die Elektronen aus der β -Strahlung brauchen dagegen überhaupt nicht mehr mit der Materie zu wechselwirken, um registriert zu werden; der Szintillationszähler war ja auf geladene Teilchen empfindlich. Durch die geringen Ordnungszahlen des Szintillatorkristalls ist also das Ansprechvermögen des Detektors auf γ -Strahlen beschränkt, aber nicht Null, während das Ansprechvermögen auf β -Strahlen unbeeinflusst ist.

Weiterhin ist der β -Strahlen-Szintillationsdetektor nur durch eine dünne Folie geschützt, damit die β -Teilchen fast ungehindert in den Detektor eintreten können. Wenn man nun detektiert, so mißt man neben der β -Strahlung auch die γ -Strahlung mit. Um die störende γ -Strahlen wieder abzuziehen, kann man einen zusätzlichen Aluminium-Absorber vor den Detektor schieben. Dadurch wird die β -Strahlung abgeschirmt und man registriert nur noch ein γ -Spektrum. In einer zusätzlichen Messung kann man nun den Vielkanalanalysator so einstellen, daß er die registrierte γ -Strahlung vom β -und- γ -Spektrum abzieht, so daß ein reines β -Spektrum zurückbleibt. Den Vielkanalanalysator haben wir in Versuch 5 [FP-5] vorgestellt. Die dem Szintillator nachfolgenden Schaltungen, z. B. den Vor- und den Hauptverstärker, haben wir genauer in Versuch 17 [FP-17] untersucht.

Es bleibt nun noch zu erwähnen, daß die Detektion der β -Strahlung stark vom Abstand des Detektors zur Quelle abhängt, da die Elektronen/Positronen auf ihrem Weg zum Detektor durch die Luft an Energie verlieren. Eine Vergrößerung des Abstandes führt also zu einer Verschiebung des Spektrums zu niedrigen Energien hin.

2. Auswertung

Als erstes zeichnen wir hier nochmal die für diesen Versuch interessanten Übergänge in den Präparaten:

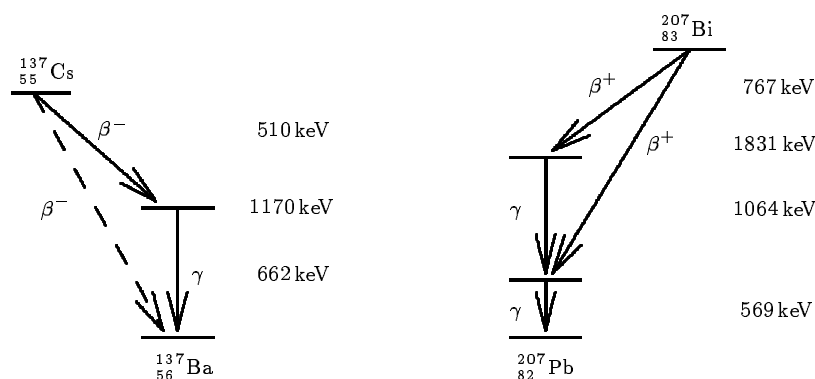


Abbildung 2.1: Übergänge in den Präparaten. Links: ^{137}Cs und ^{137}Ba ;
Rechts: ^{207}Bi und ^{207}Pb .

Beim Cäsium-Übergang ist der zweite, hochenergetische β^- -Übergang gestrichelt gezeichnet, weil ihm keine Ausstrahlung eines γ -Quants oder Konversionselektrons folgt. Für den ersten Teil, der Eichung, ist dieser β^- -Zerfall also ohne Bedeutung. Das ändert sich später beim Kurie-Plot. . .

Wie gesagt sind beim Bismut andere Zerfallsmöglichkeiten nicht eingezeichnet, weil sie sehr unwahrscheinlich sind und bei unserem Versuch nicht in Erscheinung treten (vgl. die Originalausdrucke. . .).

2.1 Eichung

Wir haben alle unsere Messungen (mit einer Ausnahme, siehe unten) im Abstand von 3,5 cm durchgeführt.

Die Eichspektren, die wir vor und nach dem „eigentlichen“ Versuch aufgenommen haben, sind in Abbildung 2.2 zusammengestellt. Für Bismut haben wir jeweils 10 Minuten das Spektrum aufgenommen (und 10 Minuten das γ -Spektrum abgezogen), bei dem Cäsium haben wir das Spektrum jeweils nur 5 Minuten lang aufgenommen (und 5 Minuten lang das γ -Spektrum abgezogen).

Aus diesen Spektren kann man die eingezeichneten Peaks ablesen. Wir haben diese Ablesung mittels Peakreport des Programmes nucleus durchgeführt und diese Peaks in die Spektren eingezeichnet. Bevor wir nun die abgelesenen Werte angeben, ermitteln wir aus den obigen Zerfallschemata die Energien, die zu den Peaks gehören.

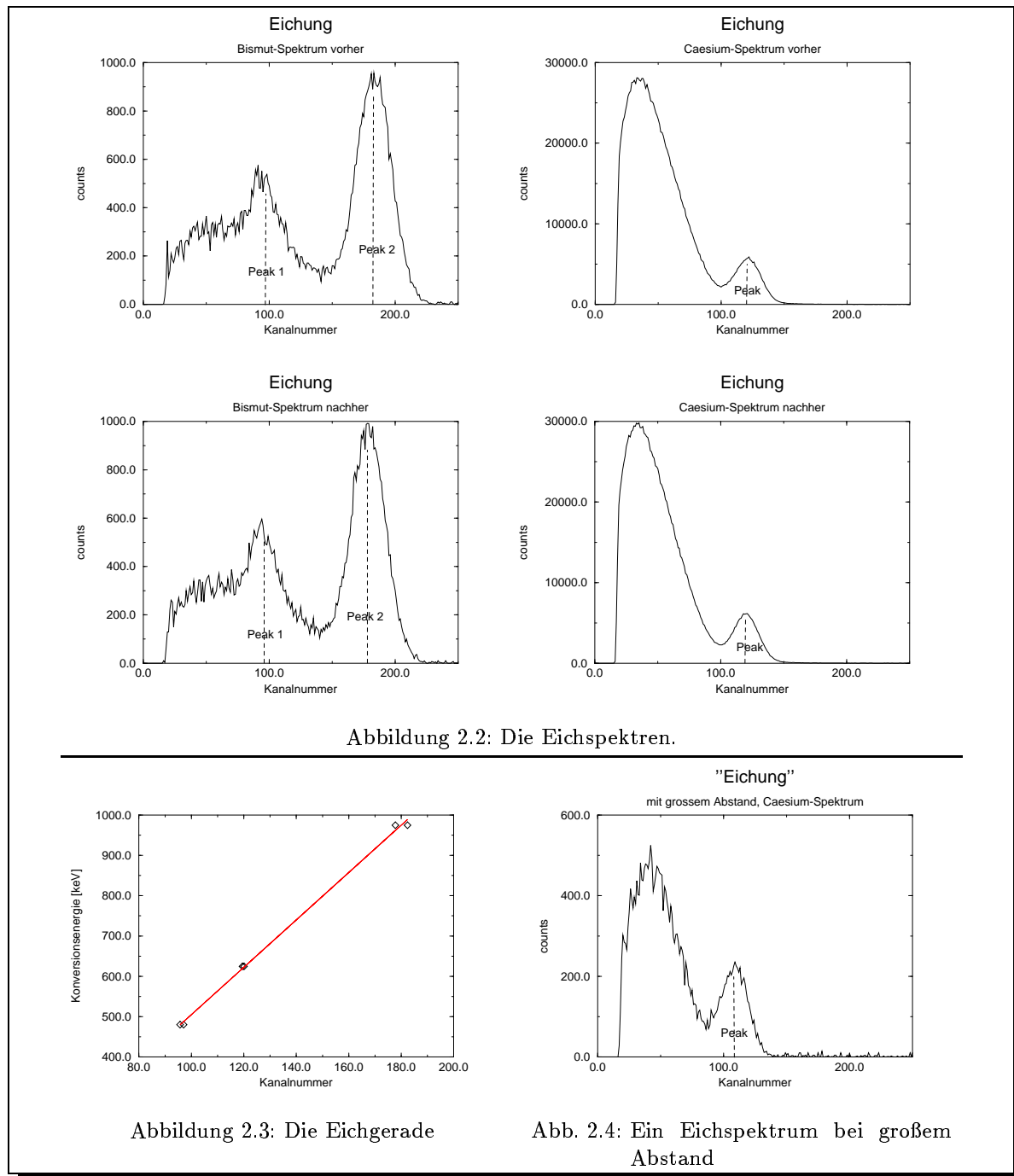


Abbildung 2.2: Die Eichspektren.

Abbildung 2.3: Die Eichgerade

Abb. 2.4: Ein Eichspektrum bei grossem Abstand

Die Peaks entstehen ja durch die Energien der Konversionselektronen. Deren Energien $E_{\text{kin, Elektron}}$ berechnen sich nach der Vorbereitung über $E_{\gamma} - E_{\text{Bindung}}$. Nach der Tabelle in der Anleitung gilt für die für uns interessanten Bindungsenergien:

K-Schale des Bariums Ba: 37,441 keV,
 K-Schale des Blei Pb: 88,005 keV.

Die Energien für E_γ stehen in den Zerfallsschemata (Abb. 2.1). In der folgenden Tabelle fassen wir jetzt also die abgelesenen Peak-Kanäle, die E_γ und die Energien der Konversionselektronen zusammen:

Messung	E_γ [keV]	$E_{\text{kin, Elektron}}$ [keV]	Kanalnummer
Bismut-Eichung vorher, Peak 1	569	480,095	97,0142
Bismut-Eichung vorher, Peak 2	1064	975,095	182,354
Cäsium-Eichung vorher, Peak	662	624,559	120,09
Bismut-Eichung nachher, Peak 1	569	480,095	95,6967
Bismut-Eichung nachher, Peak 2	1064	975,095	177,756
Cäsium-Eichung nachher, Peak	662	624,559	119,441

Aus diesen Meßwerten ermittelt man nun folgende Eichgerade:

$$E_{\text{kin}} = (5,885 \pm 0,126) \frac{\text{keV}}{\text{Kanalnummer}} \cdot M - (83,914 \pm 16,763) \text{ keV},$$

wobei M die Nummer des Kanals ist. Eine graphische Darstellung der Eichgerade findet man in Abbildung 2.3.

Wie schon angedeutet, haben wir eine Messung bei einem Abstand von 35 cm gemacht. Wir wollten damit überprüfen, ob der Abstand zwischen Probe und Detektor wirklich einen Einfluß auf die detektierten Energien hat. Dazu nahmen wir 15 Minuten lang ein Cäsium-Spektrum auf (und dasselbe nochmal zum γ -Abziehen; diesen Kommentar sparen wir uns von nun an bei den folgenden Spektren-Messungen). Das gemessene Spektrum kann man in Abbildung 2.4 bewundern. Man kann schon optisch feststellen, daß der Peak — wie erwartet — zu niedrigeren Energien hin verschoben ist. Auch der mit Peakreport ermittelte Kanalwert für den Peak sagt dies. Er lautet:

$$M_{\text{Peak, Abstand}} = 107,931.$$

Dies bedeutet, daß unser Peak bei großem Abstand nach unserer Eichung bei 551,26 keV liegen würde und nicht, wie theoretisch erwartet, bei 624,559 keV. Wir haben also unsere Vermutung bestätigen können, daß die Elektronen in Luft Energie verlieren; über die Strecke von 31,5 cm betrug der Energieverlust bei uns ungefähr 73 keV. Wir möchten an dieser Stelle nochmal den großen Unterschied der α - und β -Teilchen-„Absorption“ zur γ -Quanten-Absorption betonen: Bei den γ -Quanten werden immer ganze Photonen durch Reaktionen mit Materie absorbiert, die Intensität des Teilchenstrahls wird also vermindert, nicht aber deren Energie. Die elektrisch geladenen α - und β -Teilchen verlieren hingegen durch Reaktionen mit Materie (wie z. B. Luft) Energie, wie wir hier bestätigen konnten, aber keine Teilchen.

Aus diesem Grunde sind alle anderen Messungen penibel in 3,5 cm Abstand gemessen. Also ab hier wieder alles in diesem Abstand.

2.2 Spektrum und Kurie-Plots

Um an einem Beispiel ein β -Spektrum richtig analysieren zu können, haben wir eine Stunde lang das Spektrum von ^{137}Cs aufgenommen.

Da die endliche Energieauflösung des Szintillationsdetektors alle Peaks zu Verteilungen mit einer gewissen Halbwertsbreite verschmiert, sind die Konversionspeaks keine scharfen Linien, was sie ja theoretisch sein sollten, sondern (bei unserer Anzahl registrierter Zerfälle) gaußverteilte Peaks mit FWHM (full width at half maximum, genauer erklärt in [FP-5] oder [FP-17]) von 25 bis 35 keV. Insbesondere können wir nicht zwischen K -Konversionen und L -Konversionen, usw. unterscheiden, was nicht weiter schlimm ist, da letztere sowieso kaum vorkommen, weil zu unwahrscheinlich. Mathematisch kann man

diese Verschmierung durch eine Faltung der theoretischen Spektrums-Verteilung mit einer geeigneten „Energieauflösungs-Verschmierungs-Verteilung“ beschreiben. Wir müßten dann das Spektrum mit der Verschmierungsverteilung ent-falten. Da uns aber nur die Lage der Peaks, die als Mittelwert der verschmierten Peaks bestimmbar ist, und die Zahl der counts unter den Peaks interessiert, welche sich durch die Verbreiterung nicht ändert, sondern nur auf mehrere Kanäle verteilt, können wir auf eine solche Verkomplifizierung verzichten.

Hier ist also nun das Ergebnis der langen zweistündigen Arbeit unseres Vielkanalanalysators, so wie er es anzeigt:

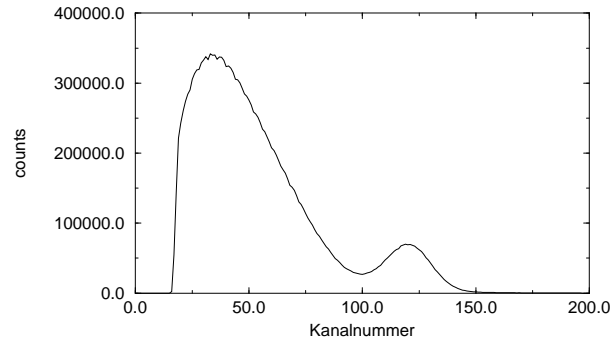


Abbildung 2.5: Unser β -Spektrum des ^{137}Cs .

So, jetzt wollen wir uns den Kurie-Plots widmen. Wir wollen also (vgl. Vorbereitung) die Werte

$$K(E_{\text{kin}}) := \sqrt{\frac{N}{F_-(E_{\text{kin}}, Z) \cdot \sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot 511} \cdot (E_{\text{kin}} + 511)}} \quad (2.1)$$

in Abhängigkeit von E_{kin} plotten, wobei N die gemessene Zahl an counts ist. Die Energie E_{kin} erhalten wir dabei, indem wir die Kanalzahlen M über die Eichgerade umrechnen. Es gilt also für die Energie und deren Fehler nach Gauß'scher Fehlertheorie:

$$E_{\text{kin}} = (5,885 \cdot M - 83,914) \text{ keV}, \quad \Delta E_{\text{kin}} = \sqrt{(0,126 \cdot M)^2 + 16,763^2} \text{ keV}.$$

Für den Fehler der Werte $K(E_{\text{kin}})$ müssen wir obige Gleichung der Gauß'schen Fehlertheorie unterziehen. Wenn wir davon ausgehen, daß die counts einer Poissonverteilung gehorchen (dazu steht mehr in Versuch 2), fällt der Fehler von N (der dann ja gerade \sqrt{N} ist) aus der Fehlerformel für $K(E_{\text{kin}})$ heraus und es ergibt sich (die Fermifunktion $F_-(E_{\text{kin}}, Z)$ ist hier fehlerfrei angenommen):

$$\Delta K = \sqrt{\frac{1}{x(E_{\text{kin}})} + \frac{N \cdot (\Delta E_{\text{kin}})^2}{4 \cdot (x(E_{\text{kin}}))^3} \cdot \left(\frac{(E_{\text{kin}} + 511)^2}{\sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot 511}} + \sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot 511} \right)^2}$$

mit $x(E_{\text{kin}}) = F_-(E_{\text{kin}}, Z) \cdot \sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot 511} \cdot (E_{\text{kin}} + 511)$.

Wir haben, um diese Berechnungen durchzuführen, ein kleines C-Programm geschrieben. Ein Programm kann natürlich alle gemessenen Kanäle umrechnen (und nicht nur 25 wie in der Anleitung verlangt). Das Programm haben wir im Anhang A aufgelistet; nicht um unseren schlechten Programmierstil zu dokumentieren, sondern damit wir schnell die benutzte und gleich in Worten beschriebene Berechnung der geeigneten Fermi-Funktions-Werte nachvollziehen können (und, damit jeder Leser unsere Fehler beim Eingeben der Formeln finden kann; es existieren hoffentlich keine...). Um nämlich die zu den Energien gehörigen Fermifunktionswerte zu bestimmen, haben wir zunächst die in der Anleitung angegebene

Tabelle in den Rechner eingegeben. Wir gingen davon aus, daß man je zwei benachbarte Werte aus der Tabelle durch eine Gerade verbinden kann und dann mit den Werten dieser Geraden keine großen Fehler zur wahren Fermifunktion macht (denn dort, wo sich die Fermifunktion besonders stark ändert, sind auch Werte für viele Energiewerte angegeben).

Obwohl wir auch die Fehler berechnet haben, zeichnen wir sie nicht in den folgenden Plot ein, da sie viel zu dicht lägen und man nichts mehr erkennen würde. Also hier zunächst der Kurie-Plot für das gesamte Spektrum:

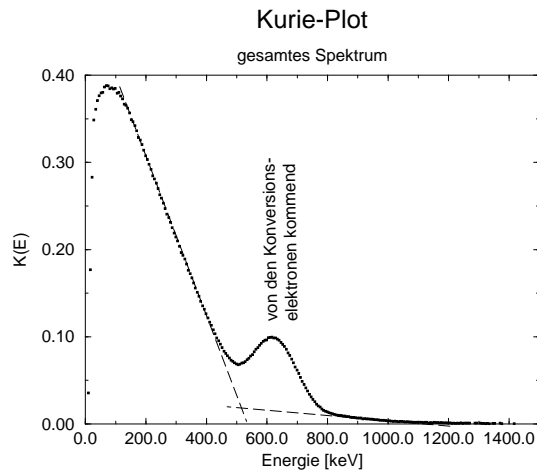


Abbildung 2.6: Kurie-Plot des gesamten Spektrums.

Wir haben mit zwei gestrichelten Geraden die Geraden der beiden β -Zerfälle unterstützt. Wir werden diese beiden Bereiche gleich noch näher untersuchen. Zwischen den beiden Bereichen der β -Zerfälle, die aus dem β -Kontinuum kommen, befindet sich ein Bereich, in dem die Konversionselektronen aktiv waren. Diese fügen sich natürlich nicht in die Fermi-Theorie; sie haben ja auch nichts mit dem β -Zerfall an sich zu tun. Den dadurch entstehenden Peak im Kurie-Plot Abb. 2.6 haben wir wohl deutlich genug gekennzeichnet.

Wir erkennen anhand des Plots Abbildung 2.6, daß der Bereich zwischen 110 keV und 460 keV (niederenergetischer Zerfall) und der Bereich zwischen 820 keV bis 1400 keV (hochenergetischer Zerfall) von näherem Interesse ist. Die mit unserem Programm errechneten Werte für diese Bereiche haben wir im Anhang B aufgelistet; hier würde diese lange Liste nur stören.

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit dem hochenergetischen Bereich, da wir für selbigen die counts ja nicht zu korrigieren brauchen. Wir plotten die Kurie-Werte dieses Bereichs aber nur für Energien bis ungefähr 1050 keV, denn in diesem Bereich sind die counts noch größer als 80 counts in einer Stunde. An dieser Stelle sind ein paar Auswirkungen des γ -Spektrum-Abziehens recht erwähnenswert. Durch das Abziehen des γ -Spektrums kann es nämlich vorkommen, daß man scheinbar zu manchen Energien negative counts zählt. Der VKA weiß, daß das ja eigentlich Unsinn ist, und zeigt statt negativen counts eine sehr große Zahl an: seine interne maximale Zahl minus dem Betrag der negativen counts. Wir haben dies natürlich in allen Spektren korrigiert, indem wir an solchen Stellen diese große Zahl subtrahierten. Dieses Phänomen macht aber deutlich, daß wir bei unserer Messung zwei „Statistiken“ voneinander abziehen, d. h. bei Addieren und Subtrahieren desselben Spektrums ergeben sich Schwankungen um null counts. Wir erhalten somit ein Rauschen, was unserem β -Spektrum überlagert ist. Bei unserer 1-stündigen Messung liegen die Schwankungen des Rauschens schätzungsweise bei 50 counts; zumindest zeigt sich dies, wenn man den Kurie-Plot auch für höhere Energien plottet und betrachtet. Zur weiteren Bestätigung kann man auch einen Blick auf die errechneten Werte in Anhang B werfen.

Wir haben bei dem folgenden Plot, der also nun die Kurie-Gerade des hochenergetischen Zerfalls darstellt, nur alle 5 Werte Fehler eingezeichnet, weil die Fehlerbalken der vielen Werte sonst zu dicht lägen. Die per linearer Regression ermittelte Gerade liegt recht prächtig im Plot; die leichten Abweichungen bei 820 keV sind immer noch kleine Beeinflussungen der Konversionselektronen, die bei 1050 keV sind in den statistischen Schwankungen begründet. Die Regressions-Gerade gehorcht der Gleichung $K_{\text{hochenerg.}}(E_{\text{kin}}) = a \cdot E_{\text{kin}} + b$; mit unseren Regressionswerten also:

$$K_{\text{hochenerg.}}(E_{\text{kin}}) = (-3,611 \cdot 10^{-5} \pm 9,41 \cdot 10^{-7}) \cdot E_{\text{kin}} + (0,03962 \pm 0,00088) .$$

Diese Zahlen sind verhältnismäßig uninteressant. Sie dienen nur dazu, die Nullstelle der Gerade zu ermitteln, denn das ist die maximale Energie des hochenergetischen Zerfalls. Es gilt also: $\mathcal{E} = -\frac{b}{a}$. Für den Fehler gilt: $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$. Damit erhalten wir:

$$\mathcal{E} = (1097,2 \pm 37,6) \text{ keV} .$$

Dieser Wert beinhaltet in seinen Fehlergrenzen zwar nicht den theoretischen Wert von 1170 keV, aber ist dennoch so schlecht nicht, da die Entscheidungen, wann obige Abweichungen zu stark sind und wann akzeptabel, subjektive Entscheidungen sind. Vielleicht waren wir zu großzügig und hätten doch erst ab 850 keV die Kuriegerade plotten sollen. Wir denken aber, daß wir mit unserem Wert ziemlich zufrieden sein können.

Fehlt noch eine Sache zu unseren Ausführungen: der zugehörige Plot. Hier kommt er endlich:

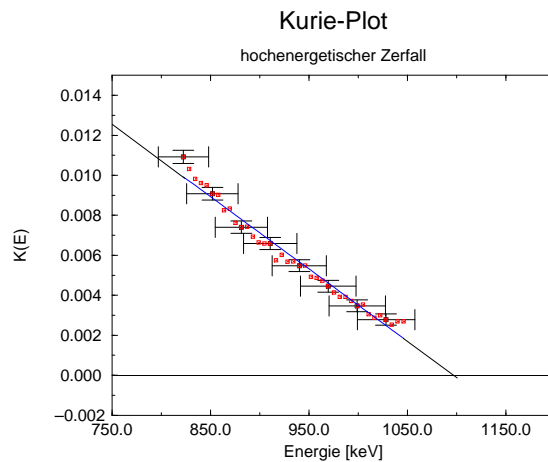


Abbildung 2.7: Der Kurie-Plot des hochenergetischen Zerfalls.

Bevor wir den niederenergetischen Übergang plotten, müssen wir ihn von den counts des hochenergetischen Zerfalls befreien. Dies geschieht über folgende Formel:

$$\begin{aligned} K_{\text{niederenerg.}}(E_{\text{kin}}) &= \sqrt{\frac{N - N_{\text{hochenerg.}}}{F_{-}(E_{\text{kin}}, Z) \cdot \sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot 511 \cdot (E_{\text{kin}} + 511)}}} \\ &= \sqrt{(K(E_{\text{kin}}))^2 - (K_{\text{hochenerg.}}(E_{\text{kin}}))^2} = \sqrt{(K(E_{\text{kin}}))^2 - (a \cdot E_{\text{kin}} + b)^2} . \end{aligned}$$

Für den Fehler $\Delta K_{\text{niederenerg.}}$ gilt daher:

$$\Delta K_{\text{niederenerg.}} = \frac{1}{K_{\text{niederenerg.}}} \cdot \sqrt{(K \cdot \Delta K)^2 + (a \cdot E_{\text{kin}} + b)^2 \cdot (a^2 (\Delta E_{\text{kin}})^2 + E_{\text{kin}}^2 (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2)} .$$

Wieder haben wir bei dem folgenden Plot, der nun die Kurie-Gerade des niederenergetischen Zerfalls darstellt, nur alle 5 Werte Fehler eingezeichnet, weil die Fehlerbalken der vielen Werte sonst zu dicht lägen. Hier sind die umgerechneten Werte für die Werte mit Fehlerbalken aufgelistet; man kann sie ja mit denen aus Anhang B vergleichen:

Energie E_{kin} [keV]	Energiefehler ΔE_{kin} [keV]	„Kuriewert“ $K_{\text{nieder.}}(E_{\text{kin}})$	Fehler dazu $\Delta K_{\text{nieder.}}(E_{\text{kin}})$
110,290810	17,274004	0,378777	0,000665746
139,715744	17,437281	0,36062	0,000638486
169,140686	17,621710	0,334732	0,000614907
198,565613	17,826630	0,305714	0,000592988
227,990555	18,051348	0,279189	0,000574378
257,415497	18,295130	0,251293	0,000557724
286,840424	18,557226	0,223234	0,000543331
316,265350	18,836872	0,194435	0,000533072
345,690277	19,133299	0,170319	0,000525034
375,115234	19,445740	0,144088	0,000523183
404,540161	19,773434	0,118927	0,000529478
433,965088	20,115635	0,0955307	0,000548541

Die per linearer Regression ermittelte Gerade liegt sehr schön im Plot. Sie gehorcht wieder der Gleichung $K_{\text{hocheenerg.}}(E_{\text{kin}}) = a \cdot E_{\text{kin}} + b$; mit unseren Regressionswerten also:

$$K_{\text{niederenerg.}}(E_{\text{kin}}) = (-8,9676 \cdot 10^{-4} \pm 3,65 \cdot 10^{-6}) \cdot E_{\text{kin}} + (0,4826 \pm 0,0011).$$

Diese Zahlen sind erneut verhältnismäßig uninteressant. Ihr Nutzen liegt wieder nur darin, die Nullstelle der Geraden über $\mathcal{E} = -\frac{b}{a}$ zu ermitteln, denn das ist die maximale Energie des niederenergetischen Zerfalls (Formel für Fehler: s. o.). Wir erhalten:

$$\mathcal{E} = (538,2 \pm 2,5) \text{ keV}.$$

Dieser Wert nun liegt ungefähr 30 keV über dem theoretischen Wert von 510 keV. Diese Abweichung lässt sich durch die Röntgenstrahlung, die bei der Abregung der angeregten Elektronenhülle entsteht, wenn Konversionselektronen eine Lücke in einer tiefen Schale zurücklassen, und die Rückstreuung, die wir noch bei den Konversionskoeffizienten näher betrachten, erklären. Somit liegt unser gemessener Wert zufriedenstellend gut. Hier noch der Kurie-Plot des niederenergetischen Übergangs:

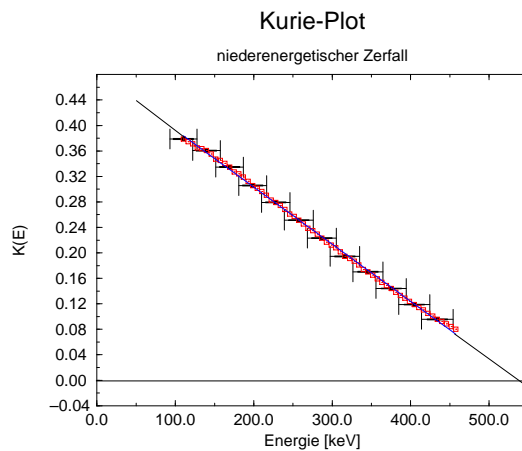


Abbildung 2.8: Der Kurie-Plot des niederenergetischen Zerfalls.

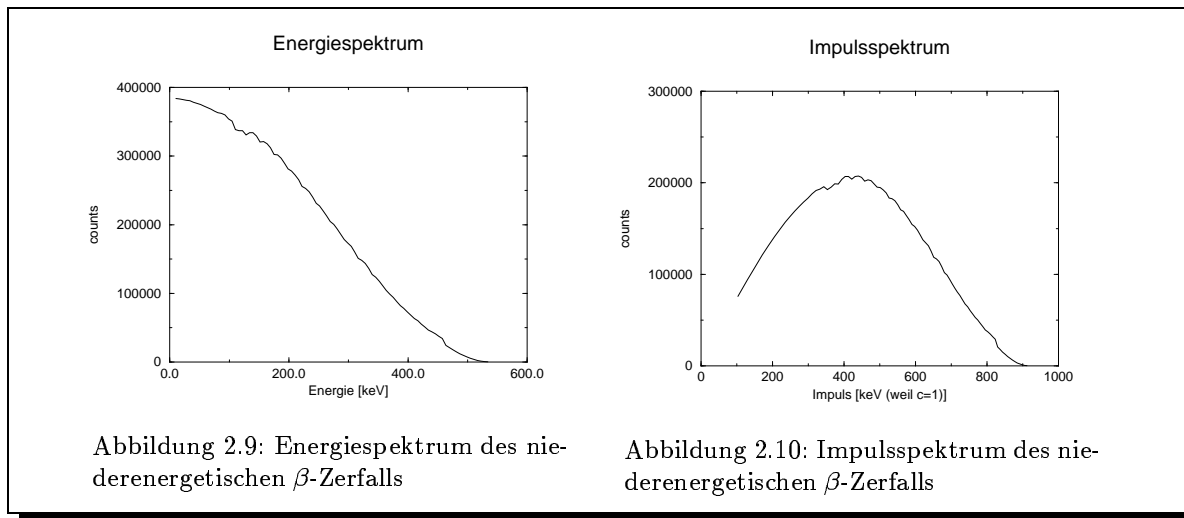


Abbildung 2.9: Energiespektrum des niederenergetischen β -Zerfalls

Abbildung 2.10: Impulsspektrum des niederenergetischen β -Zerfalls

So, nun sollen wir nach der Anleitung noch das Energie- und das Impulsspektrum plotten. Also tun wir das: Wir rechnen mittels Gleichung (2.1) die $K_{\text{niederenerg.}}(E_{\text{kin}})$ in $N_{\text{niederenerg.}}(E_{\text{kin}})$ im Energiebereich von 0 keV bis 540 keV um. Dabei wird für $K_{\text{niederenerg.}}$ je nach Energiebereich der wahre Meßwert oder der mittels der Regressionsgeraden extrapolierte Wert genommen. Das Energiespektrum ist nun in Abbildung 2.9 geplottet. Es erfüllt unsere Erwartungen voll: Für 0 keV kinetische Energie erwarten wir natürlich Elektronen im Detektor, da diese lediglich durch die Kernladung abgebremst wurden. Die Count-Zahl bei 0 keV entspricht daher der bei einer positiven kinetischen Energie, wenn die Coulombkorrektur nicht notwendig wäre. Die kleine Delle bei 110 keV rührt aus dem Wechsel der Berechnung von N über die idealen Werte zur Berechnung von N über die gemessenen Werte her.

Um das Impulsspektrum zu erhalten, berechnen wir die counts in Abhängigkeit von p mittels der Beziehung $N(p) = \frac{dE_{\text{kin}}}{dp} \cdot N(E_{\text{kin}}) = \frac{c \cdot \sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot mc^2}}{E_{\text{kin}} + mc^2} \cdot N(E_{\text{kin}})$. Die Ableitung von eben und die Umrechnung der Energien in Impulse erfolgen natürlich mit den Gleichungen (1.3) bzw. (1.2). Wir setzen $c = 1$, weil uns nicht die absoluten Werte der counts interessieren. Das Impulsspektrum findet sich in Abbildung 2.10 geplottet. Auch dieses erfüllt unsere Erwartungen voll, welche wir bereits auf Seite 17 erläutert haben; vgl. mit Abbildung 1.9.

2.3 Konversionskoeffizient

Der niederenergetische β -Zerfall des Cäsium und nur dieser endet bei einem angeregten Tochterkern. Wir wollen den Konversionskoeffizienten der Abregung dieses Barium-Tochterkerns bestimmen. Die Zahl der Konversionselektronen ermitteln wir über den zugehörigen Peak mittels Peakreport von nucleus. Unter NET INTEGRAL ist dort die Fläche unter dem Konversionspeak, die bereits von dem β -Untergrund befreit ist, angegeben. Wir maßen

$$N_e = (1\,137\,419 \pm 1\,066,5) \text{ counts} .$$

Der Fehler ist, da die counts poissonverteilt sind, als $\sqrt{N_e}$ berechnet. Entsprechend verfahren wir im folgenden; die Formeln für die Fehlerrechnung bei Summen und Quotienten legen wir hier nicht nochmal dar; wir brauchen hier ja wohl nicht explizit zu beweisen, daß wir diese einfachen Formeln beherrschen.

Die Zahl der β^- -Zerfälle ermitteln wir mit den eben berechneten counts $N_{\text{niederenerg.}}$. Wir integrieren diese counts auf die gleiche Art, wie das auch nucleus tut: Wir addieren sie einfach. Es ergeben sich so

$$N_{\text{alle}} = (17\,861\,600 \pm 4226,3) \text{ counts}$$

als niederenergetische Zerfälle. Also wurden

$$N_\gamma = N_{\text{alle}} - N_e = (16\,724\,181 \pm 4358,8) \text{ Bariumkerne}$$

über Aussendung von γ -Quanten in den Grundzustand überführt. Somit ergibt sich für den Konversionskoeffizienten:

$$\alpha = \frac{N_e}{N_\gamma} = (6,8 \pm 0,007)\% .$$

Der Literaturwert für α liegt bei 11%. Er wird nicht erreicht, weil einige Konversionselektronen — wie bereits oben angedeutet — zurückgestreut werden. Hierbei treffen einige Elektronen frontal auf Detektoratome. Dabei werden sie so stark abgelenkt, daß sie rückwärts den Detektor wieder verlassen. Sie hatten daher nicht die Möglichkeit, ihre Energie vollständig an den Detektor anzugeben, dieser registriert also eine zu niedrige Energie, d. h. einige Konversionselektronen werden im β -Kontinuum des niederenergetischen Zerfalls mitgezählt. Dies trägt also u. a. dazu bei, daß die Maximalenergie des niederenergetischen Zerfalls zu hoch erscheint und daß der Konversionskoeffizient zu niedrig ist. Wir wollen nun aus dem Literaturwert und dem gemessenen Wert den Anteil der rückgestreuten Elektronen bestimmen. Dazu betrachten wir:

$$0,11 = \alpha_{\text{Lit.}} = \frac{N_e}{N_\gamma} = \frac{N_e}{N_{\text{alle}} - N_e} = \frac{1}{\frac{N_{\text{alle}}}{N_e} - 1} .$$

Daher folgt über $\frac{1}{\alpha} = \frac{N_{\text{alle}}}{N_e} - 1$ die Gleichung $\frac{1+\alpha}{\alpha} = \frac{N_{\text{alle}}}{N_e}$ und somit

$$N_{e,\text{Lit.}} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot N_{\text{alle}} .$$

Wir hätten also

$$N_{e,\text{Lit.}} = (1\,770\,068,5 \pm 418,8) \text{ counts}$$

im Konversionspeak messen sollen. Wir haben also

$$N_{e,\text{Lit.}} - N_e = (632\,649,5 \pm 4247) \text{ rückgestreute Elektronen}$$

vorliegen gehabt. Das entspricht einem relativen Anteil von

$$(35,74 \pm 2,4)\%$$

an rückgestreuten Elektronen.

2.4 Auflösungsvermögen

Bei unserem gemessenen β -Spektrum liegt der Konversionspeak nach Peakreport des Programms nucleus bei Kanal 119,336. Nach unserer Eichung bedeutet das eine Energie von

$$E_{\text{Konversion}} = 618,4 \text{ keV} .$$

Der Peakreport gibt uns auch die Halbwertsbreite des Konversionspeaks an: Diese beträgt 25,837 Kanäle. Da das FWHM die Differenz zweier Energiewerte ist (nämlich von denjenigen Energien, bei denen die Hälfte der counts der „Peak-Mitte“ erreicht wird), erhält man die Halbwertsbreiten in keV, also die FWHM, unter Benutzung obiger Eichgerade einfach durch Multiplikation der Halbwertsbreite in Kanälen mit 5,885. Es ergibt sich

$$E_{\text{FWHM}} = 152,05 \text{ keV} .$$

Hieraus errechnet sich das relative Auflösungsvermögen zu

$$\frac{152,05 \text{ keV}}{618,4 \text{ keV}} = 24,59\% .$$

2.5 Ansprechvermögen und Comptonkante

Wir wollen nun noch abschließend das Verhalten des Detektors in bezug auf γ -Strahlen untersuchen. Wir nahmen dazu 15 Minuten lang (ohne nachfolgende Subtraktion. . .) ein reines γ -Spektrum auf. Nach Umrechnung der Kanäle über obige Energieeichung erhalten wir folgenden Plot unserer Messung:

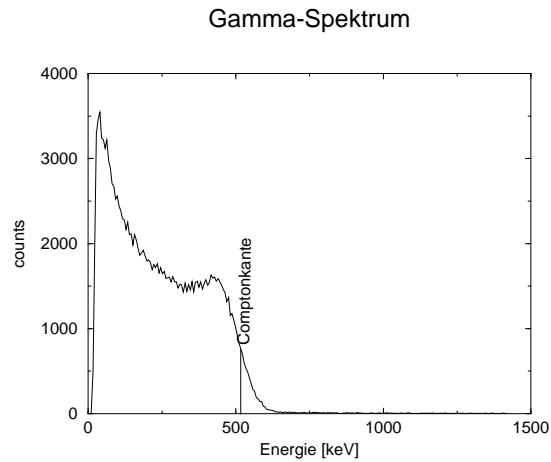


Abbildung 2.11: Das gemessene γ -Spektrum

Insgesamt haben wir

$$N_{\gamma, \text{gemessen}} = (163\,177 \pm 404) \text{ counts}$$

an γ -Quanten registriert. Diese Zahl ermittelten wir wieder über die Addition aller counts unserer Messung (wie es auch nucleus tun würde); für den Fehler nahmen wir erneut \sqrt{N} . Da unsere Messung 15 Minuten, also 900 sec, dauerte, ergibt sich für die Zählrate:

$$a_{\gamma, \text{gemessen}} = \frac{163\,177 \pm 404}{900 \text{ sec}} = (181,3 \pm 0,45) \frac{1}{\text{sec}} .$$

Andererseits erwarten wir $N_{\gamma} = \frac{N_{\alpha}}{\alpha}$ γ -Zerfälle in unserer β -Spektrums-Messung, wobei wir annehmen, daß alle β -Teilchen registriert werden. Ausgehend von den Literaturwerten $\alpha_{\text{Lit.}} = 0,11$ und, daraus folgend, $N_{e, \text{Lit.}} = (1\,770\,068 \pm 418,8) \text{ counts}$ erhalten wir

$$N_{\gamma} = (16\,091\,532 \pm 3807,3) \text{ counts}$$

für die Zahl der zu detektierenden γ -Quanten bei einer einstündigen Messung. Als Zählrate ergibt sich daher:

$$a_{\gamma} = \frac{16\,091\,532 \pm 3807,3}{3600 \text{ sec}} = (4469,87 \pm 1,06) \frac{1}{\text{sec}} .$$

Das Ansprechvermögen für γ -Quanten ist somit

$$\frac{a_{\gamma, \text{gemessen}}}{a_{\gamma}} = (4,06 \pm 0,01)\% .$$

Das ist erfreulich niedrig, wie für Anthracen erwartet.

Nun betrachten wir noch die Lage der Comptonkante. Aus unserem Plot lesen wir ab, daß diese bei einer Energie von

$$E_{\text{Compton, gemessen}} = 516,38 \text{ keV}$$

liegt, wobei wir die Energie bei der Hälfte der counts abgelesen haben im Vergleich zu der fast-konstanten count-Zahl des Compton-Kontinuums. Dies ist sinnvoll, da die theoretisch scharfe Comptonkante durch mehrfache Comptonstreuung nach beiden Seiten hin verschmiert wird.

Und wo liegt die Compton-Kante theoretisch? Nach Versuch 5 [FP-5] gilt für den maximalen Energieübertrag auf das Elektron, also die minimale Restenergie des gestreuten γ -Quants:

$$E_{\text{Rest}} = \frac{E_\gamma}{\frac{2E_\gamma}{m_e c^2} + 1}.$$

Entschwindet dieses γ -Quant aus dem Detektor, so erhält man gerade einen count genau an der Compton-Kante $E_{\text{Compton}} = E_\gamma - E_{\text{Rest}}$. Mit dem Wert $E_\gamma = 662 \text{ keV}$, den man aus Abbildung 2.1 abliest, und $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$, erhält man $E_{\text{Rest}} = 184,35 \text{ keV}$ und somit

$$E_{\text{Compton}} = 477,65 \text{ keV}.$$

Also liegt der gemessene Wert für die Compton-Kante höher als der theoretische. Dies erklärt sich folgendermaßen: Die Energieeichung haben wir für die β -Teilchen durchgeführt. Diese verlieren aber auf dem Weg durch die Luft an Energie (vergleiche die Probe-Eichung bei großem Abstand). Zusätzlich verlieren die Elektronen auch noch Energie, wenn sie durch die dünne Schutzfolie in den Detektor eintreten. Hingegen werden die γ -Quanten durch die Luft und die Folie kaum beeinflusst; insbesondere ändert sich ihre Energie nicht, wie wir bereits bei der „Eichung“ mit großem Abstand erläutert haben. Durch die Eichung mit β -Teilchen, deren Energie eigentlich bereits niedriger ist als theoretisch erwartet, erscheinen die γ -Quanten energetischer als sie in Wirklichkeit sind. Aus unseren Meßwerten ergibt sich, daß die β -Teilchen auf dem Weg von der Quelle zum Detektor auch bei unserem kurzen Abstand von 3,5 cm eine Energie verlieren, die bei 38,73 keV liegt. Diese Tatsache hat uns bei unserem Versuch natürlich überhaupt nicht gestört, da wir nur β -Teilchen gemessen haben; und deren Energien werden ja gleichmäßig abgebremst. Die Messung des γ -Spektrums hat keinen Zusammenhang mit den β -Messungen, mit Ausnahme der hier geführten Betrachtung.

2.6 Rückstoßenergie

Und nun sollen wir noch eine Rechenaufgabe erfüllen: Wir wollen die Rückstoßenergie des Bariumkerns beim niederenergetischen Zerfall berechnen. Dazu betrachten wir den Fall, daß das Elektron die maximale Energie übertragen bekommt, da wir dann besonders einfach den dem Kern übertragenen Impuls quantifizieren können. Dieser ist dann nämlich gleich dem Impuls des Elektrons (denn das System war vorher in Ruhe): $p = p_e$. Also berechnen wir den Impuls des Elektrons wie üblich über

$$c \cdot p_e = \sqrt{E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}} \cdot m_e c^2}.$$

Dabei ist $E_{\text{kin}} = 510 \text{ keV}$ (vgl. Abbildung 2.1) und $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$, also gilt: $c \cdot p_e \approx \sqrt{3} \cdot 510 \text{ keV}$. Da der Bariumkern sehr schwer ist im Vergleich zum Elektron, kann man die Rückstoßenergie des Bariumkerns klassisch berechnen. Es gilt:

$$E_{\text{Rück}} = \frac{p^2}{2m_{\text{Ba}}} = \frac{p_e^2 c^2}{2m_{\text{Ba}} c^2}.$$

Da uns nur die Größenordnung des Effekts interessiert, können wir die Masse $m_{\text{Ba}} c^2$ durch „Massenzahl des Bariums mal 1 GeV“ abschätzen, denn die Nukleonen haben ungefähr eine Masse von 1 GeV. Da die Massenzahl des Bariums 137 ist, gilt also $m_{\text{Ba}} c^2 = 137 \text{ GeV}$. Mit den erwähnten Zahlenwerten ergibt sich dann

$$E_{\text{Rück}} = \frac{3 \cdot 510\,000^2}{2 \cdot 137\,000\,000\,000} \text{ eV} = 2,85 \text{ eV}.$$

Der Rückstoß des Kernes ist also in der Tat sehr klein; wir machen also in der Fermi-Theorie kaum einen Fehler, wenn wir dort annehmen, daß der zerfallene Kern weiterhin ruht.

Alles in allem ist der Versuch gut verlaufen. Unsere Ergebnisse entsprechen unseren Erwartungen in einem zufriedenstellenden Maß.

A. Ein Programm zu den Kurie-Plots

Wir haben schon angekündigt, daß wir an dieser Stelle unser kleines Progrämmchen auflisten wollen, mit dem wir das mit nucleus aufgenommene Spektrum in die für den Kurieplot nötigen Größen umgerechnet haben. Es ist sicher kein Meisterwerk der Programmierkunst, aber wir dokumentieren es hier wenigstens, was bei den meisten anderen C-Programmen nicht der Fall ist.

Natürlich beginnt das Programm mit den üblichen Deklarationen und Informationsausgaben. Wenn das Programm ohne Parameter aufgerufen wird, werden die gewünschten Namen für die Ausgabefiles abgefragt.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <malloc.h>

int main(argc,argv)
int argc;
char *argv[];

{
/*
 * Deklarationen, Informationen und Usage-Abfrage
 */
int fermienergie[75], counts[256], i, j=0;
float fermiwert[75], energie[256], energiefehler[256], k[256];
float deltak[256], fermirechnung[256], differenz;
char ausgabedatei[80];
char texdatei[80];
char *fermidatei="fermi.dat";
char *datendatei="beta.asc";
FILE *fermi, *daten, *ausgabe, *tex;

printf("\nDieses Programm berechnet den Kurieplot zu Z=56 mittels ");
printf("\nder Datei 'fermi.dat', in der die Fermifunktion abgelegt ist");
printf("\nund den Messdaten in Datei 'beta.asc'\n");
if (argc>3) { printf("\nUsage: (prgname) ausgabedatei texdatei\n");
printf("\nBitte [Return] druecken");
gets(ausgabedatei);
gets(texdatei);exit(1);}
if (argc!=3) { printf("\nEingabe des Ausgabefiles: ");
gets(ausgabedatei);
printf("\nEingabe des TeX-files: ");
```

```

        gets(texdatei);
    }
    else {strcpy(ausgabedatei,argv[1]);
        strcpy(texdatei,argv[2]);}

```

Nun müssen die Informationen eingeladen werden: Aus der Datei `fermi.dat` erhalten wir die Daten für die Fermifunktion (mit $Z = 56$), so wie sie in der Anleitung angegeben sind. In der Datei `beta.asc` befindet sich das nach ASCII konvertierte Spektrum des Programmes `nucleus`.

```

/*
 * Einlesen der Dateien: Fermi-Funktion und Me"swerte
 */
fermi=fopen(fermidatei,"r");
for (i=1;i<76;i++)
    {fscanf(fermi,"%d %f",&fermienergie[i-1],&fermiwert[i-1]);};
fclose(fermi);
daten=fopen(datendatei,"r");
for (i=0;i<256;i++)
    {fscanf(daten,"%d",&counts[i]);};
fclose(daten);

```

Nun berechnen wir die Energien E_{kin} mittels der vorher berechneten Eichgeraden. Zusätzlich berechnen wir die Fehler der Energie ΔE_{kin} , die $K(E_{\text{kin}})$ (vgl. Auswertung: Glg. (2.1)) und deren Fehler. Wir benutzen die in der Auswertung beschriebene Methode zur Bestimmung der „genauen“ Fermifunktions-Werte.

```

/*
 * Rechnungen
 */
for (i=0;i<256;i++)
    {energie[i]=5.884987*i-83.91376;
    energiefehler[i]=sqrt(pow(i*0.126353,2)+pow(16.76321,2));
    if (energie[i]>0)
        {while (fermienergie[j]<energie[i])
            {j++;}
        differenz=(energie[i]-fermienergie[j-1])/
            (fermienergie[j]-fermienergie[j-1]);
        fermirechnung[i]=fermiwert[j-1]+(fermiwert[j]-fermiwert[j-1])*differenz;
        k[i]=sqrt(counts[i]/(fermirechnung[i]*
            sqrt(energie[i]*energie[i]+1022*energie[i])*(energie[i]+511)));
        deltak[i]=sqrt(1/(fermirechnung[i]*
            sqrt(energie[i]*energie[i]+1022*energie[i])*
            (energie[i]+511))) + (counts[i]*pow(energiefehler[i],2) *
            pow((pow((energie[i]+511),2)/sqrt(energie[i]*
            energie[i]+1022*energie[i])+sqrt(energie[i]*
            energie[i]+1022*energie[i])),2))/
            (4*pow((fermirechnung[i]*
            sqrt(energie[i]*energie[i]+1022*energie[i])*(energie[i]+511)),3)));
        }
    else {k[i]=0;deltak[i]=0;}
    }
}

```

Und nun geben wir unsere berechneten Werte noch aus und beenden das Programm ordentlich.

```
/*
 * Ausgabe der errechneten Kurie-Werte und Tabelle fuer TeX
 */
ausgabe=fopen(ausgabedatei,"w");
tex=fopen(texdatei,"w");
/*
 */
for (i=0;i<256;i++) {
  if (k[i]!=0)
    {fprintf(ausgabe,"%f %f %f %f\n",energie[i], k[i], energiefehler[i],
             deltak[i]);
      fprintf(tex,"%f & %f & %d & %f & %f & %f \\\n",energie[i], energiefehler[i],
              counts[i], fermirechnung[i], k[i], deltak[i]);
    }
};
/*
 */
fclose(tex);
fclose(ausgabe);
return 0;
}
```


B. Errechnete Kurie-Daten

Wie schon angekündigt listen wir hier die mit obigem Programm errechneten Werte für die interessanten Bereiche auf. Energien mit $N = 0$, also auch $K(E_{\text{kin}}) = 0$, sind *nicht* mitaufgeführt. Also, hier kommen die Werte; falls es sich mal jemand anschauen möchte...

Energie E_{kin} [keV]	Energiefehler ΔE_{kin} [keV]	counts N	Fermifunktionswert $F_-(E_{\text{kin}}, Z)$	„Kuriewert“ $K(E_{\text{kin}})$	Fehler dazu $\Delta K(E_{\text{kin}})$
110,290810	17,274004	341599	10,749240	0,380450	0,000655
116,175797	17,304937	339915	10,531496	0,376196	0,000649
122,060783	17,336737	339940	10,324055	0,373076	0,000644
127,945770	17,369396	334043	10,135736	0,366704	0,000638
133,830765	17,402914	337262	9,962738	0,365350	0,000632
139,715744	17,437281	337112	9,797959	0,362274	0,000627
145,600739	17,472496	332429	9,649981	0,356715	0,000622
151,485718	17,508551	323525	9,505829	0,349067	0,000617
157,370712	17,545441	324244	9,370474	0,346659	0,000612
163,255692	17,583162	321149	9,244886	0,342232	0,000607
169,140686	17,621710	315331	9,127186	0,336405	0,000602
175,025665	17,661076	305675	9,014512	0,328615	0,000597
180,910660	17,701258	304799	8,904519	0,325651	0,000592
186,795639	17,742247	300077	8,804474	0,320605	0,000587
192,680634	17,784040	292452	8,709790	0,314059	0,000583
198,565613	17,826630	284645	8,621516	0,307431	0,000578
204,450607	17,870012	281291	8,537692	0,303255	0,000574
210,335587	17,914183	275655	8,455302	0,297947	0,000569
216,220581	17,959131	268720	8,372911	0,292048	0,000565
222,105560	18,004854	258989	8,294733	0,284644	0,000561
227,990555	18,051348	256090	8,224113	0,280948	0,000557
233,875534	18,098602	251299	8,153494	0,276311	0,000553
239,760529	18,146614	243541	8,082873	0,270124	0,000549
245,645508	18,195375	234292	8,023545	0,262980	0,000545
251,530502	18,244883	230473	7,964695	0,258939	0,000541
257,415497	18,295130	223360	7,905845	0,253116	0,000537
263,300476	18,346107	216018	7,850296	0,247163	0,000533
269,185455	18,397812	207770	7,797331	0,240691	0,000529
275,070435	18,450237	203695	7,744366	0,236682	0,000525
280,955444	18,503378	197115	7,692356	0,231253	0,000522
286,840424	18,557226	189449	7,645277	0,225144	0,000518
292,725403	18,611774	181623	7,598197	0,218954	0,000515
298,610382	18,667021	176390	7,551117	0,214350	0,000511
304,495392	18,722956	171526	7,506285	0,209976	0,000508
310,380371	18,779575	163404	7,462147	0,203609	0,000504
316,265350	18,836872	154105	7,418010	0,196469	0,000501
322,150330	18,894840	151082	7,376023	0,193289	0,000498
328,035339	18,953472	146696	7,337770	0,189222	0,000495
333,920319	19,012764	139256	7,299518	0,183182	0,000491
339,805298	19,072708	130528	7,261266	0,176236	0,000488
345,690277	19,133299	126609	7,225859	0,172467	0,000485
351,575287	19,194530	120756	7,190548	0,167381	0,000482
357,460266	19,256395	114010	7,155238	0,161641	0,000479

Energie E_{kin} [keV]	Energiefehler ΔE_{kin} [keV]	counts N	Fermifunktionswert $F_-(E_{\text{kin}}, Z)$	„Kuriewert“ $K(E_{\text{kin}})$	Fehler dazu $\Delta K(E_{\text{kin}})$
363,345245	19,318890	107516	7,123274	0,155986	0,000476
369,230225	19,382006	102125	7,093849	0,151061	0,000473
375,115234	19,445740	97166	7,064424	0,146428	0,000470
381,000214	19,510082	90849	7,034999	0,140718	0,000467
386,885193	19,575027	85234	7,005574	0,135475	0,000464
392,770172	19,640574	81271	6,976149	0,131500	0,000462
398,655182	19,706709	75963	6,946724	0,126387	0,000459
404,540161	19,773434	71083	6,920023	0,121529	0,000456
410,425140	19,840736	66427	6,894129	0,116782	0,000453
416,310150	19,908613	62952	6,868235	0,113019	0,000451
422,195129	19,977060	58099	6,842341	0,107947	0,000448
428,080109	20,046070	53981	6,816447	0,103457	0,000445
433,965088	20,115635	49475	6,790554	0,098487	0,000443
439,850098	20,185753	46882	6,764659	0,095339	0,000440
445,735077	20,256414	43728	6,738765	0,091572	0,000438
451,620056	20,327618	40318	6,714168	0,087445	0,000436
457,505035	20,399355	37105	6,692982	0,083412	0,000433
792,949280	25,208054	1948	5,861281	0,014576	0,000330
798,834290	25,302559	1794	5,851865	0,013931	0,000329
804,719299	25,397343	1512	5,842449	0,012737	0,000328
810,604248	25,492399	1363	5,833033	0,012044	0,000326
816,489258	25,587727	1254	5,823617	0,011506	0,000325
822,374268	25,683323	1139	5,814201	0,010922	0,000324
828,259216	25,779182	1024	5,804785	0,010315	0,000322
834,144226	25,875305	936	5,795369	0,009823	0,000321
840,029175	25,971685	905	5,785954	0,009621	0,000320
845,914185	26,068323	891	5,776537	0,009510	0,000319
851,799194	26,165215	818	5,767481	0,009076	0,000317
857,684143	26,262354	815	5,759242	0,009024	0,000316
863,569153	26,359743	687	5,751003	0,008253	0,000315
869,454163	26,457376	706	5,742764	0,008333	0,000314
875,339111	26,555252	595	5,734525	0,007621	0,000312
881,224121	26,653368	566	5,726286	0,007404	0,000311
887,109070	26,751720	575	5,718047	0,007434	0,000310
892,994080	26,850307	503	5,709808	0,006927	0,000309
898,879089	26,949125	466	5,701569	0,006642	0,000308
904,764038	27,048172	462	5,693330	0,006589	0,000307
910,649048	27,147448	466	5,685091	0,006593	0,000305
916,534058	27,246946	357	5,676852	0,005749	0,000304
922,419006	27,346666	395	5,668613	0,006025	0,000303
928,304016	27,446606	354	5,660374	0,005683	0,000302
934,188965	27,546762	359	5,652135	0,005702	0,000301
940,073975	27,647133	334	5,643897	0,005480	0,000300
945,958984	27,747717	338	5,635657	0,005493	0,000299
951,843933	27,848511	273	5,627419	0,004919	0,000298
957,728943	27,949512	269	5,619180	0,004865	0,000297
963,613953	28,050718	257	5,610940	0,004739	0,000296
969,498901	28,152128	229	5,602702	0,004457	0,000295
975,383911	28,253740	199	5,594462	0,004141	0,000294
981,268860	28,355551	180	5,586224	0,003924	0,000293
987,153870	28,457558	181	5,577984	0,003922	0,000291
993,038879	28,559759	164	5,569746	0,003720	0,000290
998,923828	28,662153	144	5,561507	0,003474	0,000290
1004,808838	28,764736	150	5,554710	0,003533	0,000288
1010,693848	28,867510	113	5,548237	0,003056	0,000287
1016,578796	28,970470	101	5,541763	0,002879	0,000286
1022,463806	29,073614	110	5,535290	0,002994	0,000285
1028,348755	29,176941	96	5,528816	0,002787	0,000284
1034,233765	29,280447	80	5,522343	0,002535	0,000283
1040,118774	29,384134	91	5,515869	0,002695	0,000283
1046,003784	29,487997	92	5,509396	0,002700	0,000282
1051,888672	29,592035	87	5,502923	0,002617	0,000281

Energie E_{kin} [keV]	Energiefehler ΔE_{kin} [keV]	counts N	Fermifunktionswert $F_-(E_{\text{kin}}, Z)$	„Kuriewert“ $K(E_{\text{kin}})$	Fehler dazu $\Delta K(E_{\text{kin}})$
1057,773682	29,696245	63	5,496449	0,002219	0,000280
1063,658691	29,800627	83	5,489975	0,002539	0,000279
1069,543701	29,905180	65	5,483502	0,002239	0,000278
1075,428711	30,009899	54	5,477028	0,002034	0,000277
1081,313721	30,114784	45	5,470555	0,001851	0,000276
1087,198608	30,219833	39	5,464081	0,001717	0,000275
1093,083618	30,325047	51	5,457608	0,001957	0,000274
1098,968628	30,430420	49	5,451134	0,001912	0,000273
1104,853638	30,535952	51	5,445146	0,001945	0,000272
1110,738647	30,641642	46	5,439261	0,001841	0,000271
1116,623535	30,747488	32	5,433376	0,001530	0,000271
1122,508545	30,853489	42	5,427491	0,001747	0,000270
1128,393555	30,959641	41	5,421606	0,001721	0,000269
1134,278564	31,065945	6	5,415721	0,000656	0,000268
1140,163574	31,172400	37	5,409836	0,001624	0,000267
1146,048584	31,279001	17	5,403951	0,001097	0,000266
1151,933472	31,385750	40	5,398067	0,001678	0,000265
1157,818481	31,492643	36	5,392181	0,001587	0,000264
1163,703491	31,599680	28	5,386296	0,001395	0,000264
1169,588501	31,706860	25	5,380411	0,001314	0,000263
1175,473511	31,814180	36	5,374527	0,001572	0,000262
1181,358398	31,921638	21	5,368641	0,001197	0,000261
1187,243408	32,029236	24	5,362756	0,001276	0,000260
1193,128418	32,136971	15	5,356872	0,001005	0,000260
1199,013428	32,244839	12	5,350986	0,000896	0,000259
1204,898438	32,352844	19	5,345592	0,001125	0,000258
1210,783325	32,460979	6	5,340295	0,000630	0,000257
1216,668335	32,569244	8	5,334999	0,000725	0,000256
1222,553345	32,677643	7	5,329702	0,000676	0,000256
1228,438354	32,786167	15	5,324406	0,000987	0,000255
1234,323364	32,894817	4	5,319109	0,000508	0,000254
1240,208374	33,003597	16	5,313813	0,001013	0,000253
1246,093262	33,112499	6	5,308516	0,000619	0,000253
1251,978271	33,221527	12	5,303220	0,000872	0,000252
1257,863281	33,330677	13	5,297923	0,000905	0,000251
1263,748291	33,439945	13	5,292627	0,000902	0,000250
1269,633301	33,549335	11	5,287330	0,000828	0,000250
1287,288208	33,878216	9	5,271441	0,000742	0,000247
1293,173218	33,988075	8	5,266144	0,000698	0,000247
1304,943115	34,208134	10	5,255551	0,000775	0,000245
1310,828125	34,318329	6	5,250255	0,000599	0,000245
1316,713135	34,428638	6	5,244958	0,000597	0,000244
1322,598145	34,539059	1	5,239662	0,000243	0,000243
1328,483154	34,649586	4	5,234365	0,000485	0,000242
1334,368164	34,760223	1	5,229069	0,000242	0,000242
1346,138062	34,981812	6	5,218476	0,000589	0,000240
1352,023071	35,092766	7	5,213180	0,000634	0,000240
1369,677979	35,426243	10	5,197290	0,000752	0,000238
1375,562988	35,537609	2	5,191993	0,000335	0,000237
1416,757935	36,319893	1	5,156594	0,000233	0,000233

Tja, das waren sie...

Literaturverzeichnis

Im folgenden wollen wir auf die Versuchsprotokolle der anderen Experimente im Fortgeschrittenenpraktikum, die von uns durchgeführt wurden und das vorliegende Protokoll hinsichtlich der theoretischen Grundlagen ergänzen, verweisen. Außerdem stellen wir eine Liste der Literatur auf, die wir am stärksten (nicht als einzige) zur Vorbereitung und Auswertung nutzten.

- [FP-5] O. Flimm, U. Münch: *Gamma-Szintillation*, Versuch 5 im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [FP-7] O. Flimm, U. Münch: *γ - γ -Koinzidenz*, Versuch 7 im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [FP-9] O. Flimm, U. Münch: *α -Reichweite*, Versuch 9 im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [FP-17] O. Flimm, U. Münch: *Ge(Li)- γ -Spektroskopie*, Versuch 17 im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [Mar] P. Marmier: *Kernphysik I*. 9. Auflage. Zürich: Verlag der Fachvereine, 1960, 1977
- [MS] P. Marmier, E. Sheldon: *Physics of nuclei and particles*, volume 1. Academic Press, 1969
- [Butt] Haro v. Buttlar: *Einführung in die Grundlagen der Kernphysik*. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft, 1964
- [Ph6] Prof. A. Gelberg, Prof. M. Dost: *Physik VI: Kernphysik*. Vorlesungsmitschrift von U. Münch. Köln, SS 1993
- [PhBl] R. L. Mößbauer: *Neutrinos — was wissen wir heute darüber?* Physikalische Blätter **4** (1994), S. 325
- [DS] H. Daniel, H. Schmitt: *Das β -Spektrum des Cs^{137}* . Zeitschrift für Physik **168** (1962), S. 292
- [Yo] Y. Yoshiwaza: *Beta and Gamma Ray Spectroscopy of Cs^{137}* . Nuclear Physics **5** (1958), p. 122

Index

β , *siehe* Beta...

Absorption, 24
Ansprechvermögen, 31
Anthracen, 20
Asymmetrieterm, 4
Auflösungsvermögen, 30
Auger-Elektronen, 13
Auswahlregeln, 13

β -Zerfall
 inverser, 11
 β -Zerfall:Elektroneneinfang, 7, 8
 β -Kontinuum, 13
 β^- -Zerfall, 7, 8
 β^+ -Zerfall, 7, 8
 β -Spektrum, 13–17
Bethe, *siehe* Massenformel
Bethe-Weizsäcker
 Massenformel von, 1–7

Comptonkante, 31
Coulomb-Korrektur, 16
Coulombterm, 3

Diagramm
 Kurie-, 18, 25

Eichspektrum, 22
Elektroneneinfang, 7, 8
Energie-Impuls-Beziehung, 14
Energiespektrum, 29
erlaubte Übergänge, 20

Faktor
 statistischer, 15
Fermi-Funktion, 17
Fermi-Konstante, 19
Fermi-Theorie, 14–17
Funktion
 Fermi-, 17

GALLEX-Experiment, 11
 gg -Kerne, 1
 gu -Kerne, 1

hochenergetischer Zerfall, 26

Impulsspektrum, 29
innere Konversion, 12
inverser β -Zerfall, 11
Isobare, 1
Isotone, 1
Isotope, 1

Kern
 gg -, 1
 gu -, 1
 Masse, 2
 stabiler, 8
 ug -, 1
 uu -, 1
Kernkräfte, 3
Kernladungszahl, 1
Kondensationsterm, 3
Kontinuum des β -Spektrums, 13
Konversion
 innere, 12
Konversionskoeffizient, 13, 30
 partieller, 13
Korrektur
 Coulomb-, 16
 Neutrino-, 19
Kurie-Diagramm, 18, 25
Kurie-Plot, 18, 25

Masse eines Kerns, 2
Massendefekt, 1
Massenformel
 semiempirische (Bethe-Weizsäcker), 1–7
Massenparabel, 9
Massenzahl, 1

Neutrino, 11
Neutrino-Korrektur, 19
Neutronenzahl, 1
niederenergetischer Zerfall, 28
Nukleonenradius, 3
Nukleonenzahl, 1

Oberflächenterm, 3

Paarungsterm, 5
Parabel, *siehe* Massenparabel

Plot
 Kurie-, 18, 25

 Radius, 3
 Rechenaufgabe, 32
 Röntgenstrahlen, 13
 Rückstoßenergie des Kerns, 32
 Rückstreuung von Elektronen, 30

 schwache Wechselwirkung, 11
 semiempirische Massenformel, 1–7
 Spektrum
 β -, 13–17
 stabile Kerne, 8
 statistischer Faktor, 15
 Szintillationsdetektor, 20

 Term
 Asymmetrie-, 4
 Coulomb-, 3
 Kondensations-, 3
 Oberflächen-, 3
 Paarung-, 5
 Volumen-, 3
 Theorie
 Fermi-, 14–17
 Tröpfchenmodell, 2

 übererlaubte Übergänge, 20
 Übergänge
 übererlaubte, 20
 erlaubte, 20
 verbotene, 20
ug-Kerne, 1
uu-Kerne, 1

 verbotene Übergänge, 20
 Volumenterm, 3

 Wechselwirkung
 schwache, 11
 Weizsäcker, *siehe* Massenformel

 Zerfall
 hochenergetischer, 26
 niederenergetischer, 28