

Betreuer: Dr. A. Dewald

Fortgeschrittenen-Praktikum am
Institut für Kernphysik

Zählrohr und Statistik¹

Oliver Flimm
Oberstraße 74
51149 Köln

Uwe Münch
Schmittgasse 92
51143 Köln

Wintersemester 93/94²

e-mail: flimm@ph-cip.uni-koeln.de
muench@ph-cip.uni-koeln.de

¹Versuch 2

²Durchführung des Versuchs: 25.10.93

Vorwort

Wir wollen hier zunächst ein paar Worte zum Aufbau unseres Versuchsprotokolls verlieren. Denn auf den nächsten Seiten zielt ein „© by Oliver Flimm und Uwe Münch“ die letzte Zeile. Warum dies? Sind diese beiden Praktikanten so eingebildet oder übergeschnappt? Nein, das sind wir nicht, und wir wollen jetzt also begründen, warum wir diese Zeile am Ende jeder Seite für nötig halten.

Viele Praktikanten bereiten ihre Versuche im CIPLAB vor und werten sie auch dort aus. Nur einige davon schützen ihre Arbeit vor Zugriff durch andere. Das bedeutet, daß man sich vielfach die .dvi-Dateien anschauen kann, aber auch daß man direkt auf .tex-Sourcen zugreifen könnte. Dieser Zustand ist ja allgemein bekannt. Wie ist nun unsere Einstellung dazu?

Wir denken, daß es nicht Sinn der Sache (d. h. des FP's) sein kann, sich einfach die Sourcen zu kopieren. Zumeist sind diese Vorlagen auch lückenhaft oder enthalten Fehler. Kurz gesagt, aus diesen Gründen benutzen wir keine solchen Textvorlagen. (Über unser Verfahren, was Bilder angeht, werden wir uns gleich äußern.) Wie sieht das nun mit .dvi-Files aus? Wir denken, daß ein Aspekt des Fortgeschrittenpraktikums ist, daß wir lernen, wie man durchgeführte Versuche protokolliert, beschreibt und (später mal) veröffentlicht. Zu diesem Lernprozeß gehört es sicherlich auch, anhand von Beispielen zu sehen, wie so etwas geschieht. (Allerdings bezweifeln wir, daß dazu die Vorlagen immer so geeignet sind.) Zumindest halten wir es für keinen Frevel, wenn man sich anhand anderer Ausarbeitungen eine Idee holt, wie Versuchsprotokolle anzufertigen sind. Daher beabsichtigen auch wir, unsere .dvi-Dateien im CIPLAB allgemein lesbar zur Verfügung zu stellen. Dies wird *nicht* mit unseren .tex-Sourcen geschehen! Diese halten wir natürlich geschützt. Wir wollen nämlich nicht, daß unsere Mühen *einfach so* von anderen, uns bekannten oder unbekanntem Studenten weiter genutzt werden. Wie oben dargelegt, haben wir aber nichts dagegen, wenn unsere Ausarbeitung als Beispiel und Denkanstoß dient. Für Nachfragen, etc. haben wir unsere vollständigen Normal- und unsere e-mail-Adressen angegeben. Damit niemand auf die Idee kommt, sich das Leben doch zu einfach zu machen und die .dvi-Datei einfach ausdruckt und in der Hoffnung, daß sie keiner wiedererkennt, abgibt, haben wir die Copyright-Zeile eingefügt. Diese dürfte so etwas effektiv verhindern. Außerdem (wovon wir weniger überzeugt sind) dient sie vielleicht als psychologische Sperre, zu wörtlich von uns abzuschreiben.

Nachdem wir uns so ausführlich über diese Vorgehensweise ausgelassen haben, wollen wir dann auch noch ein paar Worte über Bildvorlagen verlieren. Bei manchen Versuchen benutzen wir aus Büchern eingescannte Graphiken. Wir haben dann jeweils die Herkunft vollständig (also am Bild und im Literaturverzeichnis) dokumentiert. Alle sonstigen Bilder sind von uns mittels xfig, gnuplot oder ähnlichen Programmen selbst erstellt worden.

Ein paar abschließende Worte zur benutzten \TeX -Umgebung: Wir erstellten unsere Ausarbeitungen bereits mit der Testversion des neuen Formats $\LaTeX 2_{\epsilon}$. Die benutzten Classes und Packages sind allerdings noch von Hand von uns angepaßt worden. Aber nun in medias res...

Inhaltsverzeichnis

1. Statistik	1
1.1 Ereignisse und Verteilungsfunktionen	1
1.2 Verteilungen und deren Maßzahlen	2
1.2.1 Normiertheit	3
1.2.2 Charakteristische Funktion	3
1.2.3 Die n -ten Momente	5
1.3 Spezielle Verteilungen	6
1.3.1 Die Binomial-Verteilung	6
1.3.2 Die Poisson-Verteilung	7
1.3.3 Die Gauß-Verteilung	9
1.4 Die Maßzahlen im Experiment	11
1.5 Der Chi-Quadrat-Test	14
1.6 Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen beim Kernzerfall	15
1.6.1 Intervall-Verteilung	15
1.7 Die Auswirkungen der Totzeit	16
1.7.1 Methoden zur Totzeitbestimmung	17
2. Das Zählrohr	19
2.1 Generelle Funktionsweise	19
2.2 Arbeitsbereiche	20
2.3 Tot- und Erholzeit	23
2.4 Löschung von Zählrohren	24
3. Die Meßdaten	26
3.1 Das Plateau des Zählrohrs	26
3.2 Totzeit	26
3.3 Verteilungen	27
3.3.1 Poissonverteilung	27
3.3.2 Gaußverteilung	28
3.4 Intervallverteilung	29

4. Auswertung	30
4.1 Die Totzeit	30
4.1.1 Ablesen am Oszilloskop	30
4.1.2 Zwei-Präparate-Methode	31
4.2 Das Zählrohrplateau	32
4.2.1 Unkorrigiertes Plateau	32
4.2.2 Totzeitkorrigiertes Plateau	32
4.3 Gemessene Poissonverteilung	33
4.4 Gemessene Normalverteilung	35
4.5 Empirische Mittelwerte und Varianzen im Beispiel	37
4.6 Intervallverteilung	38
4.7 Der Chi-Quadrat-Test in Aktion	39
Literaturverzeichnis	42
Index	43

Abbildungsverzeichnis

1.1	Binomialverteilung	7
1.2	Poissonverteilung	9
1.3	Gaußverteilung	10
1.4	χ^2 -Verteilung	14
1.5	Intervallverteilung	16
1.6	Totzeit	17
2.1	Prinzipieller Aufbau eines Zählrohres	20
2.2	Arbeitsbereiche des Zählrohres	21
2.3	Typische Zählrohrschaltungen	24
4.1	Unkorrigiertes Zählrohrplateau	32
4.2	Totzeitkorrigiertes Plateau	33
4.3	Plot unserer Poisson-Messung	34
4.4	Plot der Poisson-Messung unserer Kommilitonen	35
4.5	Unser Gauß-Plot	36
4.6	Mittelwerte der Stichproben	37
4.7	Skizzen der Intervallverteilungsmessung	38
4.8	Die Hypothesen für den χ^2 -Test	39

1. Statistik

In diesem Versuch werden wir verschiedene statistische Aspekte physikalischer Messungen eingehender betrachten. Alle physikalische Messungen unterliegen statistischen Schwankungen, es wird also Zeit, sich mal ausführlicher mit daraus resultierenden Problemen auseinanderzusetzen. Insbesondere der Kernzerfall ist dafür geeignet, da bereits dieser als solcher statistisch verläuft. In diesem Versuch interessiert es uns ausnahmsweise nicht, in welcher Form der Kern zerfällt; nur die Tatsache, daß er es tut, ist von Bedeutung. Daher werden wir die Kernstrahlung mit einem Zählrohr detektieren, das — wie der Name schon sagt — nur die Zahl der Zerfälle zählt. Auch die Gelegenheit, uns mit dem prinzipiellen Aufbau dieses Geräts auseinanderzusetzen, werden wir hier nutzen.

1.1 Ereignisse und Verteilungsfunktionen

Wir beginnen mit ein paar grundlegenden Axiomen und Begriffen:

Wir wollen alle *Ereignisse* als Mengen von *Elementarereignissen* auffassen, wobei letztere jeweils eine Möglichkeit aus allen Möglichkeiten in einer bestimmten Situation umfassen (z. B. eine '1' gewürfelt). Als E bezeichnen wir das Ereignis, das alle Elementarereignisse umfaßt, also sicher eintritt. Den Begriff des Ereignisses legen wir nun zunächst dadurch genauer fest, daß wir die Erfüllung folgender Axiome fordern:

Axiom 1: Sind A und B Ereignisse, so sind auch $\bar{A} := E \setminus A$, $AB := A \cap B$ und $A \dot{+} B := A \cup B$ Ereignisse.

Axiom 2: Jedem Ereignis ist eine reelle Zahl $\mathcal{P}(A) \geq 0$ zugeordnet.

Axiom 3: Für E gilt: $\mathcal{P}(E) = 1$.

Axiom 4: Wenn A und B sich ausschließen (d. h. leeren Durchschnitt haben), so ist die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung $\mathcal{P}(A \dot{+} B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$.

Axiom 5: Sind A_1, A_2, \dots Ereignisse, die niemals alle gleichzeitig eintreffen können, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = 0.$$

Aus den Axiomen folgt leicht, daß folgende Relationen für alle A gelten:

$$\mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A), \quad 0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1.$$

Wir müssen diesen Begriff noch ein wenig erweitern, denn eine unendliche Vereinigung $A_1 + A_2 + \dots$ von sich ausschließenden Ereignissen muß nicht notwendigerweise wieder ein Ereignis sein (hat ja niemand gefordert, Axiom 1 fordert dies nur für endliche Vereinigungen). Durch die gleich angedeutete Konstruktion erreichen wir aber, daß abzählbare Vereinigungen der eben dargelegten Art wieder Ereignisse

sind; das sollte reichen. Man erweitert dazu die Menge der Ereignismengen zur Menge aller meßbaren Mengen mit dem Maß \mathcal{P} , die wir mit $\mathcal{B}(E, \mathcal{P})$ bezeichnen. Da $\mathcal{B}(E, \mathcal{P})$ eine σ -Algebra ist, gelten alle Axiome auch für diese erweiterten Ereignismengen. Mehr zu meßbaren Mengen und σ -Algebren findet man in [Sem-1] und [Sem-2]¹.

Wir können nun also von meßbaren Mengen mit Maß \mathcal{P} ausgehen, die obige Axiome erfüllen.

In unserer Modellbildung ist eine *zufällige Größe* eine meßbare Funktion², die auf E definiert ist und in \mathbb{R} hineingeht: $x : E \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Funktion beschreibt alle Möglichkeiten eines skalaren Meßprozesses: Zu jedem meßbaren Ereignis gibt die Funktion den Meßwert an. Interessant ist nun die Verteilungsfunktion, die uns einen Überblick darüber gibt, wie wahrscheinlich es ist, Ereignisse zu messen mit einem kleineren Meßwert als ein vorgegebener. Daher definieren wir die *Verteilungsfunktion* $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ durch:

$$F(t) := \mathcal{P}(x^{-1}(-\infty, t]) =: \mathcal{P}(x < t).$$

Die Verteilungsfunktion F hat folgende Eigenschaften: Sie ist linksseitig stetig, monoton wachsend, für $t \rightarrow -\infty$ strebt sie nach 0 und für $t \rightarrow +\infty$ strebt sie gegen 1.

1.2 Verteilungen und deren Maßzahlen

Der interessanteste Begriff ist nun der der *Wahrscheinlichkeitsdichte*. Wir werden gleich einige Spezialfälle von Wahrscheinlichkeitsdichten, auch *Verteilungen* genannt, betrachten. Aber zunächst erklären wir, was das ist.

Als erstes der einfache Fall: F ist stetig differenzierbar. Dann ist $f := F'$ die Wahrscheinlichkeitsdichte. Da f dann auf \mathbb{R} definiert ist, nennt man f auch eine *kontinuierliche Verteilung*. Mit dieser Funktion kann man nun die Frage beantworten, die Physiker ständig stellen: Wie wahrscheinlich ist es, daß ein Meßwert im Intervall $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ liegt. Um diese Frage zu beantworten, braucht man nämlich nur f über das entsprechende Intervall zu integrieren. Das macht Verteilungen so wichtig und deswegen werden wir uns mit besonders häufig auftretenden speziellen Verteilungen noch näher befassen.

Aber zunächst der zweite auftretende Fall: F ist eine Treppenfunktion. In diesem Fall kann man nicht direkt eine Wahrscheinlichkeitsdichte definieren. Man kann aber dennoch die obige „Physikerfrage“ mathematisch korrekt beantworten: Dazu löst man das Stieltjes-Integral $\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} dF$. Mehr über diese Integrale findet man in [Sem-6]. Aber, so praktisch diese Notation für die abstrakte Beschreibung aller Fälle (funktioniert auch beim ersten Fall) ist, so unpraktisch ist sie zur realen Berechnung. Also: Wie geht das³? Die Stellen, an der die Treppenfunktion springt, sind Elemente einer diskreten Teilmenge A von \mathbb{R} , nennen wir die Stellen a_i , und die Werte, um die die Treppenfunktion bei a_i springt, nennen wir p_i . Dann definieren wir die Funktion $f : A \rightarrow [0, 1]$, $a_i \mapsto p_i$. Wenn wir diese Funktion nun nach den Regeln integrieren, nach denen man Integrale diskreter Massenverteilungen ($m_{a_i} = 1$) integriert (siehe dazu [Ana], Abschnitt 16.5), so erhalten wir auch hier die richtige Antwort auf die vielzitierte Frage. Die so definierte Funktion f nennt man auch eine *diskrete Verteilung*. Denn, wenn das Intervall um a_i , über das integriert wird, klein genug ist, dann ist das Ergebnis der Integration ja gerade p_i .

Schauen wir nun uns an, welche besonderen Eigenschaften und Größen die Verteilungen besitzen.

¹Diese beiden Texte sind Tischvorlagen und Ausarbeitungen zu einem Seminar der Mathematik, das einer von uns besucht hat. Es würde zu weit führen, die Ergebnisse hier im Detail darzustellen. Selbst diese Aussagen legen wir hier nur dar, um das folgende halbwegs schlüssig formulieren zu können. Wir möchten an dieser Stelle nun auch nicht verschweigen, daß man unser E , das ja für jede Anwendung anders aussehen kann, jeweils in ein \mathbb{R}^n einbetten können muß, um die zitierten Stellen anwenden zu können.

²Dazu steht wieder mehr in [Sem-1] und [Sem-2].

³Die folgende Beschreibung umschreibt die mathematisch korrekte Definition des Stieltjes-Integrals durch Erfindung einer neuen Funktion. Warum auch nicht?

1.2.1 Normiertheit

Die Verteilungen sind normiert. Es gilt ja:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b dF .$$

Mit den Grenzübergängen $a \rightarrow -\infty$ und $b \rightarrow \infty$ erhält man dann wegen den Konvergenzaussagen für F aus 1.1 auf Seite 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} dF = 1 .$$

1.2.2 Charakteristische Funktion

Der *Erwartungswert* \mathcal{E} einer Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich einer zufälligen Größe x (mit Verteilungsfunktion F , Verteilung f , falls existent) ist definiert als

$$\mathcal{E}g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dF(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t) dt .$$

Die Erwartungswertbildung ist linear auf dem Raum der Funktionen. Dies bedeutet natürlich nicht unbedingt, daß die Erwartungswertbildung auch linear von den zufälligen Größen abhängt; dies wird nur dann der Fall sein, wenn die Funktionen g selbst linear sind.

Bisher haben wir von reellwertigen Größen und Erwartungswerten gesprochen. Die Erweiterung der Integrale auf komplexwertige Funktionen ist ganz kanonisch (vgl. [Ana], 16.15).

Nun definieren wir die *charakteristische Funktion* $\phi(t)$ ganz allgemein ($t \in \mathbb{R}$):

$$\phi(t) := \mathcal{E}e^{itx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF(u) .$$

Nach [Sem-1] konvergiert dieses Integral immer, da e^{itu} beschränkt ist.

Wenn F stetig differenzierbar ist, so ist ϕ die Fouriertransformierte von f :

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} f(u) du .$$

Man kann dann sicher sein, daß f eindeutig durch ϕ festgelegt ist. Außerdem ist leicht einzusehen, daß $\phi(0) = 1$ gilt, weiterhin $|\phi(t)| \leq 1$ und es gilt, daß ϕ stetig ist (vergleiche zur Fouriertransformationen: [Sem-10], [Sem-12], [Sem-14] und das Buch [Za]).

Ganz entsprechende Aussagen kann man treffen, wenn F eine Treppenfunktion ist, man also eine diskrete Verteilung f definieren kann. Dann gilt nämlich

$$\phi(t) = \sum p_k \exp(ita_k)$$

für die charakteristische Funktion. Man sieht, daß die obigen Aussagen auch hier gelten, insbesondere kann man die Funktion f wieder eindeutig ablesen: $f : a_k \mapsto p_k$.

Bevor wir endlich an die n -ten Momente gehen und damit die speziellen Verteilungen untersuchen, wollen wir noch eine wichtige Eigenschaft der charakteristischen Funktion ausarbeiten. Es geht um die Beantwortung folgender Frage: Können wir die Verteilungsfunktion einer Summe von zwei unabhängigen zufälligen Größen berechnen? Dazu schauen wir uns zunächst theoretisch an, wie das aussehen muß: Wegen der Unabhängigkeit der zufälligen Größen x und y mit den Verteilungen f und g gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß x im Intervall $[a, b]$ und y im Intervall $[c, d]$ liegt:

$$\int_a^b f(u) du \cdot \int_c^d g(v) dv = \int_a^b \int_c^d f(u)g(v) du dv .$$

Die Verteilungsfunktion $H(t)$ von $x+y$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß $x+y < t$ ausfällt, nach Definition also $H(t) = \mathcal{P}(x+y < t)$. Diese Wahrscheinlichkeit ist gleich dem folgenden Doppel-Integral, was man mittels Satz von Fubini und Substitution löst⁴:

$$\begin{aligned} H(t) &= \iint_{u+v < t} f(u)g(v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t-u} f(u)g(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^t f(u)g(w-u) dw \\ &= \int_{-\infty}^t dw \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(w-u) du . \end{aligned}$$

Differenziert man nun nach t , so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte als Faltung⁵ der Dichten f und g :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du = (f * g)(t) .$$

Nun kann man aber einfach sehen, daß die Faltung zweier Funktionen bedeutet, daß sich ihre Fouriertransformierten multiplizieren. Wenn man also Verteilungen f und g vorgegeben hat, so kann man einfach die charakteristischen Funktionen ϕ_f und ϕ_g berechnen und dann die charakteristische Funktion $\phi_f \cdot \phi_g =: \phi_h$ definieren. Die Rücktransformation ist dann die obige Verteilung h der Summe der unabhängigen Größen. Das ist schön einfach und ein großer Vorteil der charakteristischen Funktionen. Überzeugen wir uns nochmal davon, daß das wirklich so funktioniert:

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot h(t) &= \int_{\mathbb{R}} \phi_h(u) e^{-iut} du = \int_{\mathbb{R}} \phi_f(u) \phi_g(u) \cdot e^{-iut} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi_f(u) \int_{\mathbb{R}} g(t') e^{iut'} dt' e^{-iut} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t') \int_{\mathbb{R}} \phi_f(u) e^{-iu(t-t')} du dt' \\ &= 2\pi \cdot \int_{\mathbb{R}} g(t') f(t-t') dt' \\ &= 2\pi \cdot (f * g)(t) . \end{aligned}$$

■

⁴Die dazu benötigten Methoden stehen in [Ana], Kapitel 16 und 17; sie sollten jedem bekannt sein. . .

⁵Die Faltung zweier Funktionen f und g bezeichnen wir nach [Sem-12] durch $f * g$.

1.2.3 Die n -ten Momente

Unter dem n -ten *Moment* α_n einer Größe x versteht man den Erwartungswert von der Funktion x^n :

$$\alpha_n := \mathcal{E}x^n = \int_{-\infty}^{\infty} u^n dF(u).$$

Die Existenz dieser Werte ist nicht von vorneherein gesichert, obige Definition soll also nur dann gelten, wenn das Integral existiert. Bei unseren Spezialverteilungen und den Momenten, die uns interessieren, werden wir keine Probleme haben.

Analog kann man die *Momente in bezug auf einen Punkt c* bilden:

$$\mathcal{E}(x - c)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (u - c)^n dF(u).$$

Nun kommt der Grund, warum wir uns mit charakteristischen Funktionen beschäftigt haben: Wenn α_n existiert, so kann man die charakteristische Funktion n -mal differenzieren und es gilt:

$$\phi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{itu} dF(u).$$

Insbesondere gilt für $t = 0$:

$$\phi^{(n)}(0) = i^n \alpha_n. \quad (1.1)$$

Wir können nun also sehr einfach n -te Momente berechnen. Die wichtigsten Momente sind die folgenden.

Mittelwert

Der *Mittelwert* ist einfach das erste Moment. Wir bezeichnen es mit $\mu := \alpha_1 = \mathcal{E}x$. Es beschreibt den Schwerpunkt aller möglichen Meßergebnisse. Nach (1.1) berechnet sich der Mittelwert durch:

$$\mu = -i \cdot \phi'(0).$$

Die Mittelwertbildung $\mathcal{E}x$ ist linear, da die Funktion $g = \text{id}$ linear ist.

Varianz

Die *Varianz* ist das zweite Moment in bezug auf den Mittelwert. Wir bezeichnen die Varianz mit σ^2 . Die Wurzel aus der Varianz nennt man *Streuung* σ . Unter Ausnutzung der Linearität der Erwartungswertbildung und Gleichung (1.1) erhält man aus der Definition der Varianz folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathcal{E}(x - \mu)^2 = \mathcal{E}(x^2 - 2\mu x + \mu^2) \\ &= \mathcal{E}(x^2) - 2\mu^2 + 2\mu^2 = \mathcal{E}(x^2) - (\mathcal{E}x)^2 \\ &= -\phi''(0) + \phi'(0)^2. \end{aligned}$$

Wir haben festgestellt, daß die Mittelwertbildung linear ist. Für die Varianzen bzw. Streuungen gilt dies nicht. Aber immerhin gilt:

Die Streuung σ ist homogen, also $\sigma_{cx} = c\sigma_x$. Man erkennt dies leicht anhand

$$\sigma_{cx}^2 = \mathcal{E}(cx - c\mu)^2 = c^2 \cdot \mathcal{E}(x - \mu)^2 = c^2 \sigma_x^2.$$

Und wie addieren sich Streuungen? Seien x_1 und x_2 zwei unabhängige zufällige Größen mit Varianzen σ_x^2 und σ_y^2 . Dann gilt:

$$\sigma_{x+y}^2 = \mathcal{E}(x - \mu_x + y - \mu_y)^2 = \mathcal{E}(x - \mu_x)^2 - 2\mathcal{E}((x - \mu_x)(y - \mu_y)) + \mathcal{E}(y - \mu_y)^2.$$

Da x und y unabhängig sind, gilt weiter für den mittleren Term:

$$\mathcal{E}((x - \mu_x)(y - \mu_y)) = \mathcal{E}(x - \mu_x) \cdot \mathcal{E}(y - \mu_y) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Also erhält man:

$$\sigma_{x+y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \quad (1.2)$$

Schiefe

Das dritte Moment in bezug auf den Mittelwert ist Null, wenn die Verteilung symmetrisch ist. Das liegt einfach daran, daß $(x - \mu)^3$ antisymmetrisch ist. Deswegen definieren wir

$$\gamma := \frac{1}{\sigma^3} \mathcal{E}((x - \mu)^3)$$

als ein Maß für die Asymmetrie und nennen diese Maßzahl *Schiefe*.

1.3 Spezielle Verteilungen

Nun endlich werden wir die wichtigsten Eigenschaften spezieller Verteilungen untersuchen und das bisher Betrachtete anwenden.

1.3.1 Die Binomial-Verteilung

Ein *Bernoulli-Experiment* ist ein Experiment, in dem man N unabhängige Experimente macht, wobei bei jedem Experiment nur zwei verschiedene Ereignisse auftreten können: A_k oder $\overline{A_k}$. Zusätzlich muß gelten: $\mathcal{P}(A_k) = p \equiv \text{const}$. Nach Axiom 3 und 4 gilt dann für die Komplemente $\overline{A_k}$: $\mathcal{P}(\overline{A_k}) = 1 - p =: q$.

Wir suchen nun die (diskrete) Verteilung, die uns angibt, wie wahrscheinlich es ist (gemessen durch p_k in obiger Notation), daß $a_k := k$ Mal von den insgesamt N Versuchen das Ereignis A_k eintritt. Dabei ist $k \in \{0, \dots, N\}$.

Zunächst wollen wir dies ganz formal tun: Wir nehmen an, daß wir nur $N = 1$ Experiment ausführen: Die Wahrscheinlichkeiten für A_1 und $\overline{A_1}$ sind dann ja gerade p und q . Also gilt für die Verteilung f : $0 \mapsto q$ und $1 \mapsto p$ und die charakteristische Funktion ist $\phi_{\text{einzel}}(t) = pe^{it} + q$. Wenn wir nun die N unabhängigen Experimente durchführen, so haben wir in Abschnitt 1.2.2 gelernt, daß sich die zugehörige charakteristische Funktion durch Multiplikation der einzelnen charakteristischen Funktionen ergibt. Also:

$$\phi_{\text{Binom}}(t) = (\phi_{\text{einzel}}(t))^N = (pe^{it} + q)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k q^{N-k} e^{ikt}.$$

Daraus lesen wir die *Binomialverteilung* ab:

$$f_{\text{Binom}} = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}.$$

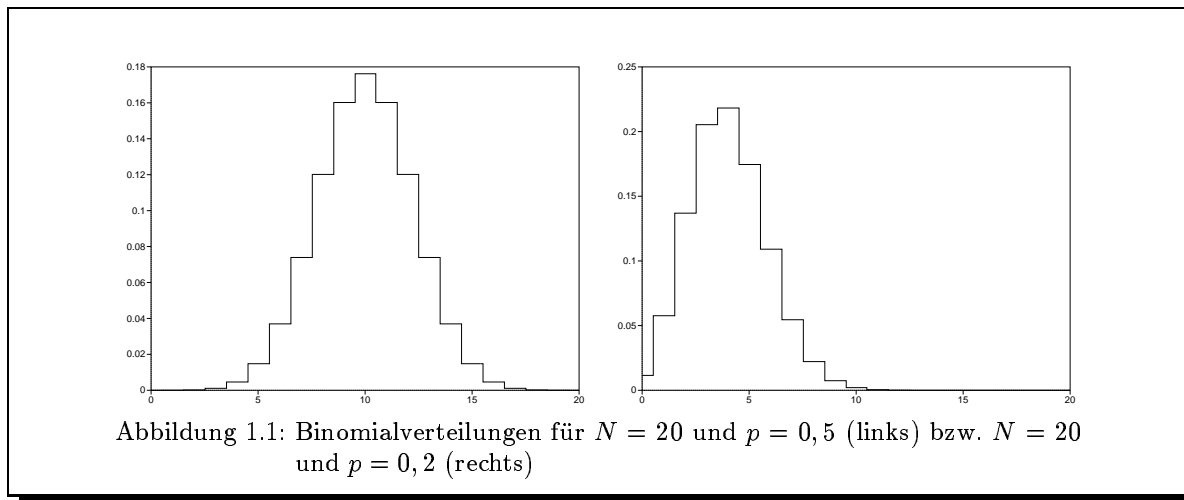


Abbildung 1.1: Binomialverteilungen für $N = 20$ und $p = 0,5$ (links) bzw. $N = 20$ und $p = 0,2$ (rechts)

Dasselbe kann man auch kombinatorisch herleiten: Da die einzelnen Experimente unabhängig sind, ergibt sich für k -faches Auftreten von A_i die Wahrscheinlichkeit

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{k\text{-Mal}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{(N-k)\text{-Mal}} = p^k q^{N-k}.$$

Nun haben wir aber die Reihenfolge der Ereignisse beachtet, d. h. die ersten k sollten gelingen, die anderen nicht. Um auch noch die anderen Kombinationsmöglichkeiten zu beachten, muß man mit der Zahl an unterscheidbaren Umordnungsmöglichkeiten multiplizieren. Das ist gerade der Faktor $\binom{N}{k}$. Damit erhalten wir wieder obige Verteilungsfunktion.

Berechnen wir noch die Maßzahlen:

Für den Mittelwert ergibt sich:

$$\mu = -i\phi'(0) = -i \cdot N \cdot (pe^{i \cdot 0} + q)^{N-1} \cdot p \cdot ie^{i \cdot 0} = Np(p+q)^{N-1} = Np,$$

wobei die letzte Gleichung gilt, weil ja $p+q=1$.

Für die Varianz ergibt sich (wieder $p+q=1$ angewendet):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= -\phi''(0) + \phi'(0)^2 = -N(N-1)(pe^{i \cdot 0} + q)^{N-2}(pe^{i \cdot 0})^2 - N(pe^{i \cdot 0} + q)^{N-1} \cdot i^2 \cdot pe^{i \cdot 0} - N^2 p^2 \\ &= Np - Np^2 = Np(1-p) = Npq. \end{aligned}$$

Und die Schiefe beträgt (was wir mit maple berechneten):

$$\gamma = \frac{2p-1}{\sigma}.$$

Man erkennt, daß die Binomialverteilung für $p=0,5$ symmetrisch ist.

In der Abbildung 1.1 sind beispielhaft zwei Binomialverteilungen geplottet, und zwar für $N=20$, $p=0,5$ und $N=20$, $p=0,2$.

1.3.2 Die Poisson-Verteilung

Wenn wir im Bernoullischen Fall sehr viele Experimente N durchführen, so ist es unpraktisch die Binomialverteilung zu berechnen, weil die Binomialkoeffizienten numerisch unhandlich sind. Ist aber

die Wahrscheinlichkeit p für die Fälle A_k sehr klein, so daß das Produkt Np nicht groß ist, so können wir die Binomialverteilung annähern. Diese Näherung nennt man *Poisson-Verteilung*. Sie ist auf alle seltenen Ereignisse anwendbar, z. B. auf Unfälle und — wie wir es tun werden — auf Kernzerfälle.

Die Näherung verläuft folgendermaßen: Ausgehend von der exakten Binomialverteilung erhält man mit $\lambda := Np$:

$$\begin{aligned} f_{\text{Binom}} &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= \frac{N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{N^k} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-k} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{N}\right). \end{aligned}$$

Der erste Faktor hängt nicht von N ab, der zweite konvergiert für wachsendes N gegen $e^{-\lambda}$. Alle anderen Faktoren laufen gegen 1. Also ergibt sich für $N \rightarrow \infty$ die Poissonverteilung als:

$$f_{\text{Poisson}} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Die Zahl der Versuche N tritt glücklicherweise nicht in dieser Verteilung auf. Dies ist ein entscheidender Vorteil dieser Näherung, denn die Gesamtzahl der Kerne in einer Probe zu bestimmen, um die Wahrscheinlichkeit des Kernzerfalls zu beschreiben, würde wohl an der Praxis scheitern.

Auch hier berechnen wir wieder die entscheidenden Maßzahlen. Dazu benötigen wir die charakteristische Funktion. Da die Poisson-Verteilung eine diskrete Verteilung für $k \in \mathbb{N}_0$ ist, gilt:

$$\phi_{\text{Poisson}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} e^{itk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \exp(it))^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda \exp(it)} = e^{\lambda(\exp(it)-1)}.$$

Mittels der üblichen Formel für den Mittelwert erhalten wir:

$$\mu = -i^2 \cdot e^{\lambda(\exp(i \cdot 0)-1)} \cdot \lambda \cdot e^{i \cdot 0} = \lambda.$$

Wir erkennen nun anhand der charakteristischen Funktion, daß die Summe zweier unabhängiger poissonverteilter Größen mit Mittelwerten λ_1 und λ_2 wieder poissonverteilt ist, und zwar mit Mittelwert $\lambda_1 + \lambda_2$. Dem ist so, da das Produkt zweier poisson-charakteristischer Funktionen wieder von der gleichen Struktur ist.

Für die Varianz erhalten wir:

$$\sigma^2 = e^{\lambda(\exp(i \cdot 0)-1)} \cdot \lambda^2 \cdot e^{2i \cdot 0} + e^{\lambda(\exp(i \cdot 0)-1)} \cdot \lambda \cdot e^{i \cdot 0} - \lambda^2 = \lambda.$$

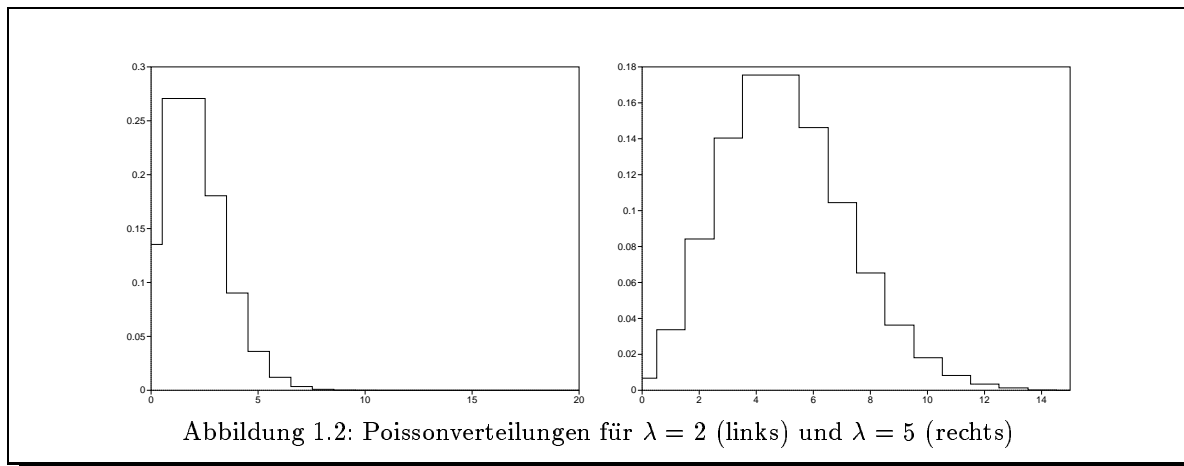
Es gilt also für die Poissonverteilung: $\sigma^2 = \mu$, d. h.

$$\sigma = \sqrt{\mu}.$$

Für die Schiefe gilt (wieder mit `maple` berechnet):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Auch hier zeigen wir in Abbildung 1.2 beispielhaft zwei Plots der Poissonverteilung. Es handelt sich um die Poissonverteilungen mit den Mittelwerten $\lambda = 2$ und $\lambda = 5$.

Abbildung 1.2: Poissonverteilungen für $\lambda = 2$ (links) und $\lambda = 5$ (rechts)

1.3.3 Die Gauß-Verteilung

Eine wichtige Verteilung ist die sogenannte *Normal-* oder *Gauß-Verteilung*. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte hat die folgende Form mit einem $\sigma > 0$:

$$f_{\text{Gauß}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Um die charakteristische Funktion zu bestimmen, müssen wir $f_{\text{Gauß}}$ fouriertransformieren. Dazu substituieren wir $y := \frac{x-\mu}{\sigma}$ und bestimmen $\phi_{\text{Gauß}}$ zunächst in Abhängigkeit von $\frac{t}{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{Gauß}}\left(\frac{t}{\sigma}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \sigma e^{it\mu/\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{ity} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{it\mu/\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}y^2 - ity\right)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{it\mu/\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it)^2 - \frac{t^2}{2}} dy \quad (\text{quadr. Ergänzung}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{it\mu/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz}_{=\sqrt{2\pi}} \quad (\text{Substitution } z := y - it) \\ &= e^{it\mu/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\phi_{\text{Gauß}}(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2}.$$

Zunächst berechnen wir hieraus wieder unsere Maßzahlen.

Für den Mittelwert ergibt sich:

$$\mu_{\text{Gauß}} = -i \cdot i \cdot \mu \cdot e^{0 \cdot (i\mu - 0 \cdot \sigma^2/2)} - \sigma^2 \cdot 0 \cdot \dots = \mu.$$

Und für die Varianz gilt:

$$\sigma_{\text{Gauß}}^2 = -(i\mu)^2 \cdot e^{i \cdot 0 \cdot \dots} + i\mu \cdot \sigma^2 \cdot 0 \cdot e^{\dots} + 0 \cdot (\dots) + \sigma^2 \cdot e^{i \cdot 0 \cdot \dots} - \mu^2 = \sigma^2.$$

Die Benennungen der Konstanten μ und σ in der Gaußverteilung $f_{\text{Gauß}}$ hatte also ihren Grund...

Die Schiefe der Gaußverteilung ist natürlich $\gamma = 0$, da $f_{\text{Gauß}}$ symmetrisch bezüglich μ ist.

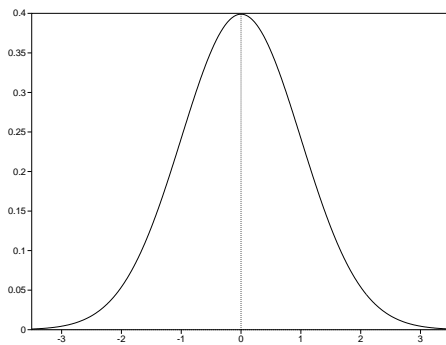


Abbildung 1.3: Standardisierte Normalverteilung bzw. Gaußverteilung

Bemerkenswerterweise ist also die charakteristische Funktion wieder eine — weil wir unsymmetrisch fouriertransformieren allerdings nicht normierte — Gaußverteilung, deren Varianz nun $\frac{1}{\sigma}$ ist und mit Mittelwert 0, während der ursprüngliche Mittelwert eine Drehung des Definitionsbereichs in der komplexen Ebene bewirkt. Wir erkennen hieran, daß die Gaußverteilung mit Varianz $\sigma^2 = 1$ und Mittelwert $\mu = 0$ eine besondere Stellung genießt, da deren charakteristische Funktion bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ wieder die Verteilung selbst ist (bei symmetrischer Fouriertransformation wäre sie exakt involutiv). Wir nennen diese spezielle Verteilung *standardisierte Normalverteilung*. Durch $y := \frac{x-\mu}{\sigma}$ können wir immer unsere Meßwerte so transformieren, daß sie einer standardisierten Normalverteilung

gehörten. Aus diesem Grunde tabellieren Formelsammlungen diese spezielle Verteilung; und wir plotten sie hier.

Wiederum erkennen wir an der charakteristischen Funktion, daß die Summe unabhängiger gaußverteilter Größen x und y mit Mittelwerten μ_1 und μ_2 und Varianzen σ_1 und σ_2 wieder gaußverteilt ist, da das Produkt wieder die Struktur einer charakteristischen Funktion einer Normalverteilung besitzt; und zwar hat diese normalverteilte Summe einen Mittelwert $\mu_1 + \mu_2$ und eine Varianz $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Hingegen ist das Produkt zweier unabhängiger gaußverteilter Größen *nicht* wieder gaußverteilt, sondern es ist χ^2 -verteilt. Mehr dazu steht in [CHI].

Weitere Eigenschaften

Um die Lage der *Wendepunkte* der Gaußverteilung zu bestimmen, müssen wir ableiten, um die zweite Ableitung gleich Null setzen zu können. Also:

$$f'_{\text{Gauß}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \cdot \left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma}.$$

$$f''_{\text{Gauß}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \cdot \left(\left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Aus $(x-\mu)^2 = \sigma^2$ folgt also, daß die Wendepunkte an den Stellen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ liegen.

Ebenso sehen wir, daß die Normalverteilung nur ein Extremum, ein Maximum bei μ , besitzt. Die Höhe der Gaußverteilung ist also $f_{\text{Gauß}}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

Da die Fläche unter der Verteilung über einem Intervall $[a, b]$ ja die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der ein Meßwert in dieses Intervall fällt, sind solche Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Intervalle von großem Interesse. Leider ist die Gaußverteilung nicht elementar integrierbar; man muß also auf numerische Methoden der Integration ausweichen. Aus [Kr] stammen folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mu - \sigma < x \leq \mu + \sigma) &\approx 68\%, \\ \mathcal{P}(\mu - 2\sigma < x \leq \mu + 2\sigma) &\approx 95,5\%, \\ \mathcal{P}(\mu - 3\sigma < x \leq \mu + 3\sigma) &\approx 99,7\%. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Wir sehen also, daß ungefähr $\frac{2}{3}$ aller Meßwerte in das Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, d. h. zwischen beide Wendepunkte, fallen sollte.

Die relative Höhe $\frac{f_{\text{Gauß}}(\mu \pm \sigma)}{f_{\text{Gauß}}(\mu)}$ errechnet sich einfach zu $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,607$. Es ist also zu betonen, daß die wichtige Breite 2σ zwischen den Wendepunkten *nicht* die Halbwertsbreite ist.

Für große N kann man die Binomialverteilung durch eine Gaußverteilung mit Mittelwert $\mu = Mp$ und Varianz $\sigma^2 = Npq$ approximieren (*Näherungsformel von DeMoivre-Laplace*). Ganz analog kann man die Poissonverteilung für große $\lambda = \mu$ durch eine Gaußverteilung mit $\sigma^2 = \mu = \lambda$ approximieren, was wenig erstaunlich ist, da ja die Poissonverteilung eine Näherung der Binomialverteilung ist.

1.4 Die Maßzahlen im Experiment

Bei der Messung einer Größe im Experiment unterliegt diese *einer* Wahrscheinlichkeitsverteilung. Diese Verteilung besitzt Mittelwert und Varianz (zumindestens nehmen wir bei physikalischen Messungen an, daß diese Werte existieren). Nur kennen wir diese beiden Größen nicht. Um sie exakt zu kennen, müßten wir unendlich oft messen. Das geht natürlich nicht, wir haben also immer nur endliche Stichproben, d. h. endlich viele beobachtete Werte, wie sie sich zufällig ergeben, zur Verfügung. Können wir trotzdem etwas über den Mittelwert und die Varianz der wahren Verteilung sagen?

Sei also eine Stichprobe (x_1, \dots, x_n) unabhängiger zufälliger Größen bzw. Messungen, die alle der gleichen Verteilung $f(t)$ mit wahren Mittelwert μ und wahrer Varianz σ^2 gehorchen, gegeben. Wir berechnen einfach mal das *arithmetische Mittel* M der Stichprobe, das wir dann *empirischen Mittelwert* nennen wollen:

$$M := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k .$$

Diese Größe ist selbst zufällig verteilt, d. h. verschiedene Stichproben ergeben verschiedene M . Da M aber als Summe unserer n unabhängigen, zufälligen Größen gegeben ist, können wir den Mittelwert μ_M von M berechnen (die Mittelwertbildung war ja linear):

$$\mu_M = \mathcal{E}M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{E}x_k = \frac{1}{n} \cdot \mu \cdot \sum_{i=1}^n 1 = \mu .$$

Da M und x also den gleichen Mittelwert, der ja ein spezieller Erwartungswert ist, besitzen, nennt man M *erwartungstreu* zu x .

Weiterhin können wir die Varianz σ_M^2 nach Glg. (1.2) berechnen:

$$\sigma_M^2 = \mathcal{E}(M - \mu_M)^2 = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}\left(\frac{x_k - \mu}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^n 1 = \frac{\sigma^2}{n} , \quad (1.4)$$

also $\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Jetzt ist wohl der Zeitpunkt erreicht, an dem wir etwas über die Bedeutung der Varianz, oder vielmehr der Streuung, sagen sollten (bisher haben wir sie ja immer nur berechnet). Sie liegt darin, daß Abweichungen einer Größe x von ihrem Mittelwert μ , die groß gegen σ sind, sehr unwahrscheinlich sind. Allgemein (d. h. für beliebige Verteilungsfunktionen mit Mittelwert und Streuung) gilt nämlich die *Tschebyscheff'sche Ungleichung*:

Ist g eine beliebige positive reelle Zahl, so ist die Wahrscheinlichkeit für $|x - \mu| > g \cdot \sigma$ kleiner als g^{-2} , also: $\mathcal{P}(|x - \mu| > g \cdot \sigma) < \frac{1}{g^2}$.

Wir werden gleich sehen, daß wir diese Abschätzung in unserem Fall sogar durch die deutlich schärferen Abschätzungen (1.3) für die Normalverteilungen ersetzen können.

Wir sehen also, daß die Abweichung unseres empirischen Mittelwerts vom wahren Mittelwert nur von der Größenordnung $\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ist. M ist also eine brauchbare Schätzung für μ , sie ist um so besser, je

umfangreicher unsere Stichprobe ist, also je größer n ist (für diese Eigenschaft sagt man: die Schätzung ist *konsistent*). Praktisch bestimmen wir also die Mittelwerte real auftretender Verteilungen so wie beschrieben als arithmetisches Mittel der Stichprobe.

Für die Varianz könnten wir erstmal folgende Größe aus unseren Meßwerten berechnen:

$$s_{\mu}^2 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 .$$

Sie ist erwartungstreu. Unangenehmerweise ist uns aber μ nicht exakt bekannt, wir könnten nur stattdessen unsere Schätzung M einsetzen:

$$s_M^2 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - M)^2 .$$

Dies bewirkt aber, daß s_M^2 nicht mehr erwartungstreu zu σ^2 ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(s_M^2) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{E}((x_k - \mu) - (M - \mu))^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \mathcal{E}(x_k - \mu)^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^n \mathcal{E}((x_k - \mu)(M - \mu)) + n \cdot \mathcal{E}(M - \mu)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot (n \cdot \sigma^2 - 2n \cdot \mathcal{E}((M - \mu)(M - \mu)) + n \cdot \mathcal{E}(M - \mu)^2) \\ &= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 . \end{aligned}$$

Um wieder eine erwartungstreuere Größe zu bekommen, definieren wir also die Größe $s^2 := \frac{n}{n-1} \cdot s_M^2$. Zu berechnen ist sie also folgendermaßen:

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - M)^2 .$$

Man nennt s^2 die *empirische Varianz* und s die *empirische Streuung*.

Es ist auch anschaulich klar, daß wir bei s^2 durch $n-1$ dividieren mußten, während bei M die Division durch n reichte. Denn bei der Berechnung von M standen uns n unabhängige Stichprobenwerte zur Verfügung. Hingegen sind diese n Werte bei der Berechnung von s^2 durch eine Zwangsbedingung miteinander verknüpft: der Berechnung von M . Eine Zwangsbedingung und n unabhängige Werte entsprechen aber gerade $n-1$ unabhängigen Meßwerten.

Der zentrale Grenzwertsatz

Nicht nur die Binomial- und die Poissonverteilung lassen sich durch die Normalverteilung approximieren. Es gilt vielmehr der folgende, sogenannte *zentrale Grenzwertsatz*.

Wenn x_1, \dots, x_n unabhängig sind und alle dieselbe Verteilungsfunktion mit Mittelwert μ und Streuung σ haben, so ist die Summe $x = x_1 + \dots + x_n$ asymptotisch normal verteilt mit Mittelwert $n\mu$ und Streuung $\sqrt{n} \cdot \sigma$.

Eine zufällige Größe x heißt *asymptotisch normal verteilt*, wenn ihre Verteilungsfunktion von einem Parameter n abhängt und zwei Zahlen a und c , die auch von n abhängen dürfen, existieren, so daß die

Wahrscheinlichkeitsdichte der Größe $\frac{x-a}{c}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen die standardisierte Normalverteilung strebt. Im zentralen Grenzwertsatz ist speziell $a \equiv \mu n$ und $c \equiv \sigma\sqrt{n}$.

Beweis: Wir können $\mu = 0$ annehmen. Denn wenn $\mu \neq 0$ ist, dann betrachte die zufälligen Größen $x_1 - \mu, \dots, x_n - \mu$ und die Summe $\tilde{x} = x_1 + \dots + x_n - \mu n$. Für diese Größen ist der Mittelwert Null und der zentrale Grenzwertsatz gilt, wie wir gleich zeigen werden. Also ist $\tilde{x} = x - \mu n$ asymptotisch normalverteilt mit Mittelwert Null und Streuung $\sigma\sqrt{n}$. Daher ist dann auch x asymptotisch normalverteilt mit Mittelwert μn und Streuung $\sigma\sqrt{n}$.

Die charakteristische Funktion der x_k sei $\phi(t)$. Dann ist $\phi(t)^n$ die charakteristische Funktion von x . Für die charakteristische Funktion ψ von $\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}$ gilt dann⁶: $\psi(t) = \phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n$.

Wir müssen nun zeigen, daß ψ für $n \rightarrow \infty$ gegen die charakteristische Funktion der Standard-Normalverteilung, $\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$, konvergiert. Dazu entwickeln wir $\phi(t)$ in eine Taylorreihe. Mit Glg. (1.1) und $\mu = 0$ ergibt sich für kleine z ($R(z)$ Restglied):

$$\phi(z) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + R(z).$$

Setzen wir nun $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ für z ein, so gilt für große n

$$\phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + R\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Nun logarithmieren wir, entwickeln den Logarithmus und multiplizieren mit n . \tilde{R} ist ein weiteres Restglied, das klein ist mit großem n .

$$\ln \psi(t) = n \cdot \ln \phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = n \cdot \left(-\frac{t^2}{2n} + \tilde{R}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = -\frac{t^2}{2} + n \cdot \tilde{R}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Mit dem Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und Exponentiation auf beiden Seiten erhält man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right).$$

■

Wir sehen also, daß Messungen, wie sie auf Seite 11 dargelegt sind, asymptotisch normalverteilt sind. Das bedeutet — wie bereits oben angedeutet — daß die schärferen Ungleichungen (1.3) im Vergleich zur Tschebyscheff'schen Ungleichung gelten, wenn n groß genug ist.

Dies ist auch förderlich bei der Anwendung der Gauß'schen Fehlertheorie. Diese funktioniert folgendermaßen: Um den Fehler (=Streuung) einer Funktion f , die z. B. von unabhängigen Größen x und y abhängt, zu bestimmen, taylornähern wir die Funktion zunächst um ihre Mittelwerte (dabei entspricht Δx dem σ_x , usw):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

Um nun die Streuung Δf von f zu bestimmen, müssen wir also nur die Streuungen der einzelnen Summanden unserer Näherung nach Glg. (1.2) addieren und dabei beachten, daß die Streuung homogen ist. Es gilt also:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2}. \quad (1.5)$$

⁶Es gilt $\frac{x-\mu}{c} < z \iff x < cz + \mu$. Nach der Definition der Verteilungsfunktion gilt also: $F_{\frac{x-\mu}{c}}(z) = F_x(c \cdot z + \mu)$. Um die Wahrscheinlichkeitsdichten zu bekommen, leiten wir ab: $f_{\frac{x-\mu}{c}}(z) = c \cdot f_x(c \cdot z + \mu)$.

Für die Fouriertransformation gilt (vgl. [Sem-14]): Wenn $h(x) := c \cdot f(cx)$, so ist $\phi_f(t) = \phi_h(ct)$, also $\phi_h(t) = \phi_f\left(\frac{t}{c}\right)$.

Diese Näherung funktioniert also nur dann sinnvoll, wenn keine Meßwerte erheblich außerhalb der Streugrenzen liegen, sonst würden wir diese in unserer Näherung gar nicht mit beachten.

Wir erkennen an dieser Stelle die *Riesenbedeutung* der Normalverteilung: All unsere physikalischen Messungen eines wahren Wertes sind im Prinzip normalverteilt! (Im Prinzip, weil erst die Summe (bzw. die arithmetischen Mittelwerte) normalverteilt sind.) Nicht nur die Binomialverteilung oder Poissonverteilung lassen sich durch die Gaußverteilung annähern, nein, alle beliebigen Verteilungen eines wahren Werts, den wir häufig genug messen können.

1.5 Der Chi-Quadrat-Test

Wir möchten hier nicht allzu genau auf den χ^2 -Test eingehen, sondern auf die Ausarbeitung des Seminarvortrags im Fortgeschrittenenpraktikum von einem von uns verweisen, nämlich [CHI]. Hier also nur eine kurze Zusammenfassung von ein paar Ergebnissen (sonst könnten wir diese Versuchsauswertung auch fast als Statistikbuch herausgeben :-).

Die Summe gaußverteilter Größen ist wieder gaußverteilt. Das Produkt zweier gaußverteilter Größen mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ ist aber *nicht* gaußverteilt, sondern χ^2 -verteilt mit 1 Freiheitsgrad. Die Summe zweier χ^2 -verteilter Größen mit Freiheitsgraden n und m ist χ^2 -verteilt mit *Freiheitsgrad* $n + m$. Die Verteilung eines χ^2 mit n Freiheitsgraden hat folgende Gestalt:

$$f_{\chi,n}(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n-2}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

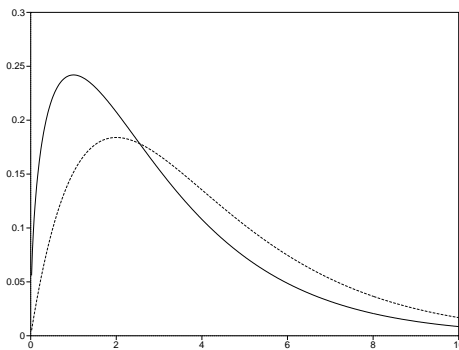


Abbildung 1.4: χ^2 -Verteilung, Freiheitsgrade $f = 3$ und $f = 4$

Die zugehörige charakteristische Funktion lautet:

$$\phi_{\chi^2}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}.$$

Für den Mittelwert, die Varianz und die Schiefe gilt bei Freiheitsgrad f :

$$\mu = f, \quad \sigma^2 = 2f, \quad \gamma = \sqrt{\frac{8}{f}}.$$

Mehrere Plots befinden sich in [CHI], für $f = 3$ und $f = 4$ befindet sich hier ein Beispielplot.

Der χ^2 -Test ermöglicht das Verwerfen von Hypothesen mit einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit (z. B. 1%, 5%).

Der Test verläuft nun folgendermaßen: Man vermutet, daß irgendein Phänomen einer bestimmten Verteilung gehorcht. Der Mittelwert und die Varianz dieser Verteilung sind für den Test ohne Interesse. Stattdessen führen wir Messungen zur Prüfung dieser Verteilung durch. Die Verteilung der Meßwerte um den Graphen der Verteilung sind nun das wesentliche unseres Tests. Wir nehmen an, sie seien gaußverteilt. Dann definieren wir uns ein Maß (plausibel, aber nicht das einzig möglich):

$$\text{Maß} := \sum_{\text{alle Meßwerte}} \frac{(x_i - f_i)^2}{\sigma_i^2}. \quad (1.6)$$

Dabei ist x_i der Meßwert, f_i der erwartete Wert der Verteilung, σ_i^2 die erwartete Abweichung des Meßwertes von f_i . Weil die Meßwerte als gaußverteilt erwartet werden, gilt $f_i = \mu_i$, mit μ_i = Mittelwert aus den N Messungen von x_i . Wenn die erwartete Verteilung unserer Messungen aus einer Poissonverteilung stammt, können wir direkt $\sigma_i^2 = \mu_i$ ersetzen. Wir berechnen nun unser Maß. Wenn das Maß zu klein oder zu groß ist im Vergleich zur tabellierten χ^2 -Verteilung mit dem zugehörigen Freiheitsgrad und der festgelegten Irrtumswahrscheinlichkeit, so muß die vermutete Verteilung verworfen werden. Mehr dazu und zur Wahl des richtigen Freiheitsgrades: siehe [CHI].

1.6 Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen beim Kernzerfall

Nach welcher Verteilung zerfallen Kerne? Man hat empirisch folgende anschauliche Gesetzmäßigkeit bestätigen können: In einem festen Zeitintervall ist die Zahl der zerfallenden Kerne proportional zu der Zahl der vorhandenen. Es ist direkt anschaulich klar, daß mehr Kerne zerfallen, wenn mehr da sind, die zerfallen können, und wenn ihnen mehr Zeit dazu zur Verfügung steht. Man beschreibt dies mit folgender infinitesimaler Formel:

$$dN = -\alpha \cdot N \cdot dt.$$

Dabei ist N die Zahl der Kerne, dN die Zahl der zerfallenden Kerne, dt die Zeit, in der die dN Kerne zerfallen und α eine für die Kernsorte charakteristische Zerfallskonstante. Natürlich kann man die Differentialgleichung $\frac{dN}{dt}(t) = -\alpha \cdot N(t)$ leicht lösen und es ergibt sich für die Zahl der nicht zerfallenen Kerne:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\alpha t}.$$

Im Zeitintervall $[0, t]$ zerfallen also $N(t) - N(0) = (1 - e^{-\alpha t}) \cdot N(0)$ Kerne. Die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls für jeden Kern innerhalb dieses Zeitintervalls ist also $1 - e^{-\alpha t}$. Da in jedem Mol eines Stoffes fast 10^{24} Kerne vorliegen und α erfahrungsgemäß recht klein ist, ist auch $p := 1 - e^{-\alpha t}$ sehr klein und da alle Kerne unabhängig sind (d. h. wenn ein Kern zerfällt, wird davon kein anderer beeinflusst), kann man den Zerfall der Kerne durch eine Poisson-Verteilung beschreiben. Es gilt $\lambda = \mu = N \cdot p = N(0) \cdot (1 - e^{-\alpha t})$. Die Zerfallskonstante α ist sogar so klein, daß man gerne die Exponentialfunktion entwickelt und einfach schreibt: $\mu = \alpha \cdot N(0) \cdot t$. Praktisch mißt man natürlich das Produkt $\alpha \cdot N(0)$, das man a nennt, die *Zählrate*. Zusammenfassend gibt also die Poisson-Verteilung

$$P(n, t) = \frac{(at)^n}{n!} \cdot e^{-at} \quad (1.7)$$

die Wahrscheinlichkeit an, daß im Zeitintervall $[0, t]$ genau n Kerne zerfallen.

1.6.1 Intervall-Verteilung

Wie wir am Beispiel des Zählrohrs sehen werden, ist mit jedem Detektor eine Totzeit verbunden, in der er keine Strahlung registrieren kann. Dies verfälscht natürlich unsere Messung. Wir wollen uns nun darum kümmern, wie wir theoretisch beschreiben können, wieviele Kerne wir „verpassen“. Im nächsten Abschnitt werden wir Methoden entwickeln, mit denen wir die verpaßten Kerne rechnerisch ausgleichen können, indem wir die Totzeit des Zählrohrs experimentell bestimmen.

Wir haben bisher berechnet, mit welcher Wahrscheinlichkeit n Kerne in einem Zeitintervall $[0, t]$ zerfallen. Jetzt soll uns folgende Frage interessieren: Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfallen im Zeitintervall $[0, t]$ genau $s - 1$ ($s \in \mathbb{N}$) Kerne und im Zeitintervall $[t, t + dt]$ noch einer?

Beide Teile der Frage werden durch Glg. (1.7) beantwortet. Die Antwort auf den ersten Teil der Frage ist einfach $P(s - 1, t) = \frac{(at)^{s-1}}{(s-1)!} \cdot e^{-at}$. Man beachte, daß dies eine Wahrscheinlichkeit ist (obwohl (1.7) ja eine Verteilung angibt) weil die Poisson-Verteilung diskret ist (in bezug auf n). Und die Antwort auf den zweiten Teil der Frage ist $P(1, dt) = a \cdot dt \cdot e^{-a \cdot dt}$. Dabei ist eigentlich $a = N(t) \cdot \alpha$, weil wir vom Zeitpunkt t ausgehen. Wir nähern aber $N(t) \approx N(0)$ und entwickeln die Exponentialfunktion: $\exp(a \cdot dt) \approx 1 + \mathcal{O}(dt)$. Damit erhalten wir $P(1, dt) = a \cdot dt$. Da beide Wahrscheinlichkeiten gleichzeitig eintreffen müssen, multiplizieren sie sich: Wir erhalten als Gesamtwahrscheinlichkeit $P_{\text{ges}} = a \cdot \frac{(at)^{s-1}}{(s-1)!} \cdot e^{-at} dt$. Dies ist eine Verteilungsfunktion (bzgl. t) mit Parameter s ; um also die sogenannte *Intervall-Verteilung* angeben zu können, müssen wir noch nach t differenzieren, was hier praktisch nur eine Division durch dt ist. Als Intervall-Verteilung mit $(s - 1)$ -facher Untersetzung ergibt sich also:

$$p_{s-1}(t) = a \cdot \frac{(at)^{s-1}}{(s-1)!} \cdot e^{-at}.$$

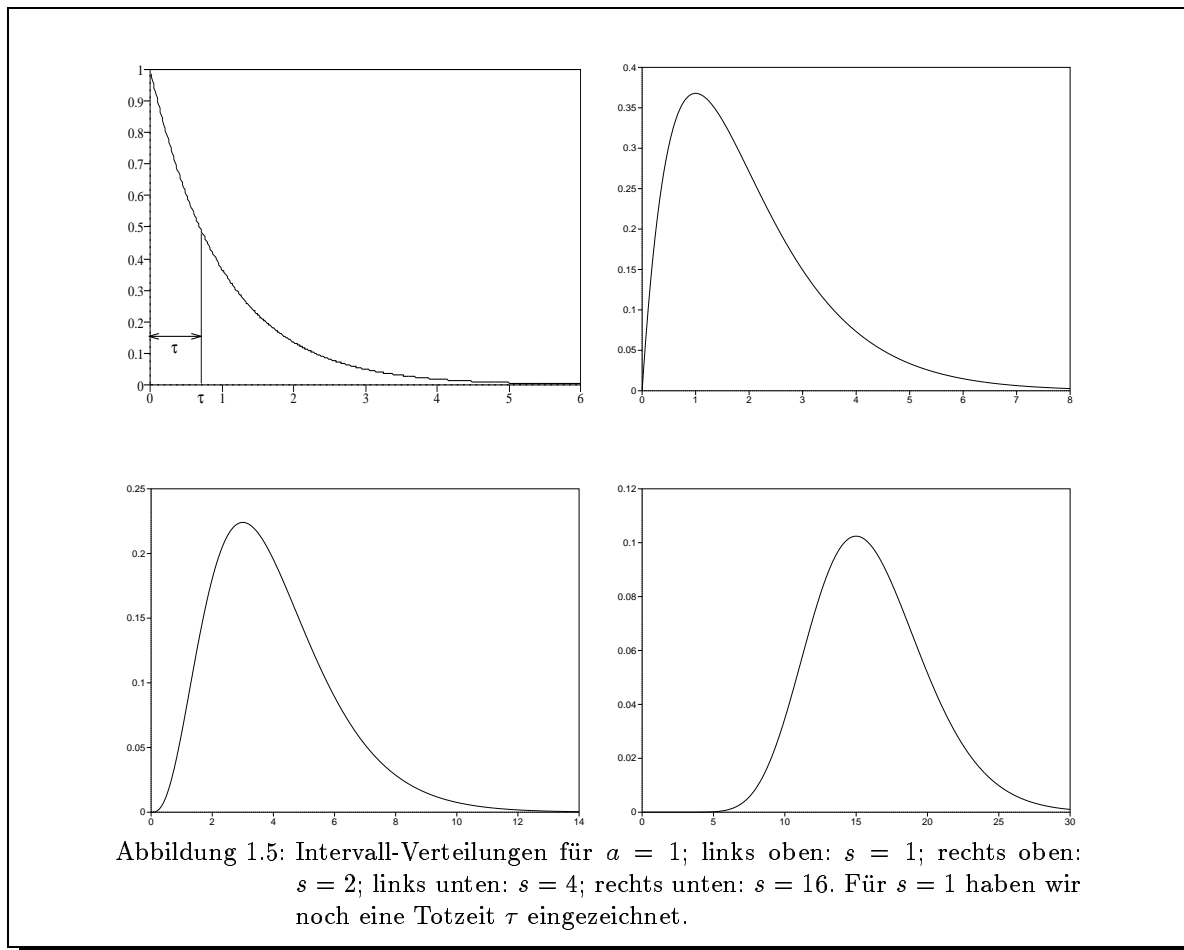


Abbildung 1.5: Intervall-Verteilungen für $a = 1$; links oben: $s = 1$; rechts oben: $s = 2$; links unten: $s = 4$; rechts unten: $s = 16$. Für $s = 1$ haben wir noch eine Totzeit τ eingezeichnet.

Insbesondere ergibt sich für $s = 1$ die Verteilung $p_0(t) = ae^{-at}$. Diese gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit zwei Kernzerfälle im zeitlichen Abstand $[t, t + dt]$ stattfinden.

In Abbildung 1.5 sind Intervallverteilungen für $a = 1$ und $s = 1, s = 2, s = 4, s = 16$ geplottet. In der Intervall-Verteilung für $s = 1$ ist zusätzlich eine Totzeit τ eingezeichnet. Alle Zerfälle, die in der Fläche unter dieser Kurve zwischen 0 und τ auftreten, werden nicht registriert. Dies sind also

$$\int_0^{\tau} p_0(t) dt = \int_0^{\tau} ae^{-at} dt = -e^{-at} \Big|_0^{\tau} = 1 - e^{-a\tau} \quad (1.8)$$

viele Zerfälle. Dies kann eine nicht ganz unbedeutende Anzahl sein. Man beachte, daß es am wahrscheinlichsten ist, daß zwei Kernzerfälle direkt hintereinander geschehen.

1.7 Die Auswirkungen der Totzeit

Wie wirkt sich nun die Totzeit auf unsere Messungen aus? Ohne Totzeit würden wir eine Poissonverteilung mit $\mu = at$ (t : Meßzeit) messen. Wegen der Totzeit verpassen wir — wie eben dargelegt — einige zerfallende Kerne; wir messen also eine kleinere Zählrate in unserer Meßzeit t . Wir kennzeichnen die Meßwerte mit Totzeit durch ein *; wir messen also nur noch $\mu^* = a^*t$.

Wir definieren die *mittlere Zerfallszeit* T derart, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte zweier Kernzerfälle im Zeitabstand T auf den $\frac{1}{e}$ -ten Teil der Wahrscheinlichkeitsdichte zweier direkt aufeinanderfolgender Kernzerfälle abgefallen ist. Aus $p_0(t)$ lesen wir ab, daß $T = \frac{1}{a}$ gilt. Entsprechend gilt für T^* die Bedingung $T^* = \frac{1}{a^*}$.

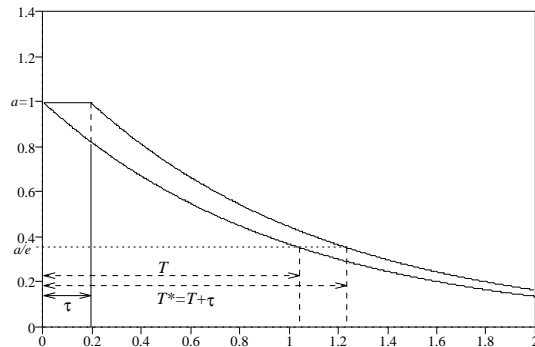


Abbildung 1.6: Totzeit und mittlere Zerfallszeit

Wir können nun eine Beziehung zwischen T und T^* herausfinden, in die die Totzeit τ eingeht. Dazu nähern wir die Zahl der verpaßten Kerne aus Glg. (1.8) brutal: $1 - e^{-a\tau} \approx a\tau$. Anschaulich bedeutet das, daß wir die Fläche unter der Kurve zwischen 0 und τ zu einem Rechteck vergrößern. Die Ungenauigkeit, die dadurch hineinkommt, ist verhältnismäßig klein; und ohne sie, wäre das Problem nur extrem schwierig greifbar. Es ist dann direkt klar, daß $T^* = T + \tau$ gilt. Wir haben den Sachverhalt und diese Beziehung nochmal in nebenstehendem Plot verdeutlicht.

Aus den bisherigen Beziehungen $T = \frac{1}{a}$, $T^* = \frac{1}{a^*}$ und $T^* = T + \tau$ können wir eine Beziehung zwischen a

und a^* und somit auch zwischen μ und μ^* herleiten:

$$\tau + \frac{1}{a} = \frac{1}{a^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{1 - a^*\tau}{a^*},$$

und daraus folgt dann (da ja $\mu = at$ und $\mu^* = a^*t$):

$$a = \frac{a^*}{1 - a^*\tau} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\mu^*}{1 - a^*\tau}. \quad (1.9)$$

Für die Streuung gilt, da sie ja homogen ist:

$$\sigma_{x^*} = \sigma_{x \cdot (1 - a^*\tau)} = (1 - a^*\tau) \cdot \sigma_x.$$

Also gilt natürlich $\frac{\sigma_x}{\mu} = \frac{\sigma_{x^*}}{\mu^*}$ und für die wahre Verteilung $\sigma_x^2 = \mu$, weil sie ja Poissonverteilung ist. Damit erhalten wir

$$\sigma_{x^*}^2 = (\mu^*)^2 \cdot \frac{\sigma_x^2}{\mu^2} = \frac{(\mu^*)^2}{\mu} = \mu^* \cdot (1 - a^*\tau);$$

die gemessene Verteilung mit Totzeit ist also keine Poissonverteilung. Da weiterhin für die Varianz $\sigma_{x^*}^2 = (\mu^*)^2 \cdot \frac{\sigma_x^2}{\mu^2} = (1 - a^*\tau)^2 \sigma_x^2 < \sigma_x^2$ gilt, die Verteilung also schmaler wird als wir es erwarten würden, sind die σ_i^2 im Maß (1.6) zu groß, unser Maß — und somit unser χ^2 — wird damit also zu klein. Auch unser χ^2 -Test warnt also, daß die gemessene Verteilung nicht poissonverteilt ist.

Um aus den gemessenen Werten die wahren Werte berechnen zu können, müssen wir also noch die Totzeit ermitteln.

1.7.1 Methoden zur Totzeitbestimmung

Oszilloskop

Jeder registrierte Zerfall wird auf dem Oszilloskop als senkrechter Strich, also als Peak, sichtbar. Wenn nun ein Teilchen registriert wurde, wird in der Totzeit kein weiteres Teilchen mehr registriert und wir können keine Peaks mehr sichten. Wenn wir die Zeitkonstante des Oszilloskops geeignet einstellen, können wir somit die Zeit ablesen zwischen einem Peak und den darauf wieder einsetzenden Peaks. Dies ist also eine sehr direkte Methode, die Totzeit zu bestimmen.

Zwei-Präparate-Methode

Eine andere, genauere Methode beruht darauf, daß sich Zählraten theoretisch addieren, aufgrund der Totzeit aber insbesondere die addierte Zählrate zu klein sein wird. Man benutzt zwei Präparate und mißt deren Zählraten zunächst einzeln. Dann mißt man die Zählrate von beiden Präparaten gemeinsam. Für die gemessenen Zählraten a_1^* , a_2^* und a_{1+2}^* gelten die Beziehungen $a_i = \frac{a_i^*}{1 - a_i^* \tau}$, sowie $a_{1+2} = a_1 + a_2$. Daraus folgt:

$$\frac{a_{1+2}^*}{1 - a_{1+2}^* \tau} = \frac{a_1^*}{1 - a_1^* \tau} + \frac{a_2^*}{1 - a_2^* \tau}.$$

Dies kann man zu der quadratischen Gleichung

$$\tau^2 - \frac{2}{a_{1+2}^*} \cdot \tau + \frac{a_1^* + a_2^* - a_{1+2}^*}{a_1^* \cdot a_2^* \cdot a_{1+2}^*} = 0$$

auflösen, deren Lösungen so aussehen:

$$\tau = \frac{1}{a_{1+2}^*} \pm \sqrt{\frac{1}{(a_{1+2}^*)^2} + \frac{a_{1+2}^* - a_1^* - a_2^*}{a_1^* \cdot a_2^* \cdot a_{1+2}^*}}. \quad (1.10)$$

Man benutzt hier nur den negativen Wert, weil der positive Wert eine unrealistisch hohe Totzeit ergeben würde.

2. Das Zählrohr

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem speziellen Nachweisgerät für Kernstrahlung. Es handelt sich dabei um das Zählrohr. Zunächst werden wir den Aufbau beschreiben und das Funktionsprinzip skizzieren. Daraufhin werden wir genauer darauf eingehen, in welchen Betriebsarten man ein Zählrohr betreiben kann. Wir beschreiben dann noch die Phänomene, die zur Totzeit führen, und die Problematik der sogenannten Löschung.

2.1 Generelle Funktionsweise

Prinzipiell beruht das Zählrohr auf der Ionisierung eines Gases. Bei einer Ionisationskammer, werden Ladungsträger nur durch *primäre Ionisation* erzeugt, d. h. die erzeugten Ionen bewirken keine weitere Ionisation, und diese Ionen werden durch ein schwaches elektrisches Feld gesammelt. Im Gegensatz dazu arbeitet das Zählrohr mit großen elektrischen Feldstärken, so daß neben Primärionisation auch *Sekundärionisation* auftritt. Es werden also durch die primär erzeugten Ionen mittels Stößen noch weitere Ionen erzeugt. Trotz der Unterscheidung an dieser Stelle werden wir später sehen, daß wir das Zählrohr auch als Ionisationskammer verwenden können.

Aufbau

Das Zählrohr besteht prinzipiell aus einem zylindrischen Rohr mit einem konzentrischen Draht in der Mitte (vgl. Abbildung 2.1).

In dem Zählrohr befindet sich ein Zählgas, das ionisiert werden soll. Bei selbstlöschenden Zählrohren ist dies oft ein Gemisch aus Argon und Alkoholdampf, also aus einem Edelgas und einer zusätzlichen organischen Verbindung, bei anderen Zählerarten wird z. B. Methan verwendet. Es gibt jedoch auch noch sehr viele andere Zählgase, die Verwendung finden.

An dem zylindrischen Rohr (*Zählrohrmantel*) und dem Draht in der Mitte wird nun eine elektrische Spannung angelegt. Hierbei wird die Spannung so gepolt, daß der Zählrohrmantel zur Kathode und der Draht zur Anode wird. Es wandern also die gebildeten Elektronen zum Draht und die gebildeten positiven Ionen zur Rohrwand.

Wenn nun ein Teilchen in das Zählrohr eintritt und ein Gasmolekül ionisiert, so wandern die Ionen (auch die Elektronen sind ja Ionen: Anionen) zu den Elektroden und lösen dort einen Ladungsstoß aus, der mit einer geeigneten Elektronik ausgewertet werden kann. Im allgemeinen ist dies ein Arbeitswiderstand, der außerhalb des Rohres am Zählrohrdraht angebracht ist (vgl. die Abbildung 2.3 für zwei exemplarische Schaltungen). Die Ladungen fließen an ihm als Stromstoß ab und so entsteht ein Spannungsstoß, der wie üblich mit Vor- und Hauptverstärker weiter verarbeitet werden kann.

Nach dieser ersten groben Skizze der Abläufe wollen wir nun auf die verschiedenen Betriebsarten und die dabei relevanten Prozesse näher eingehen.

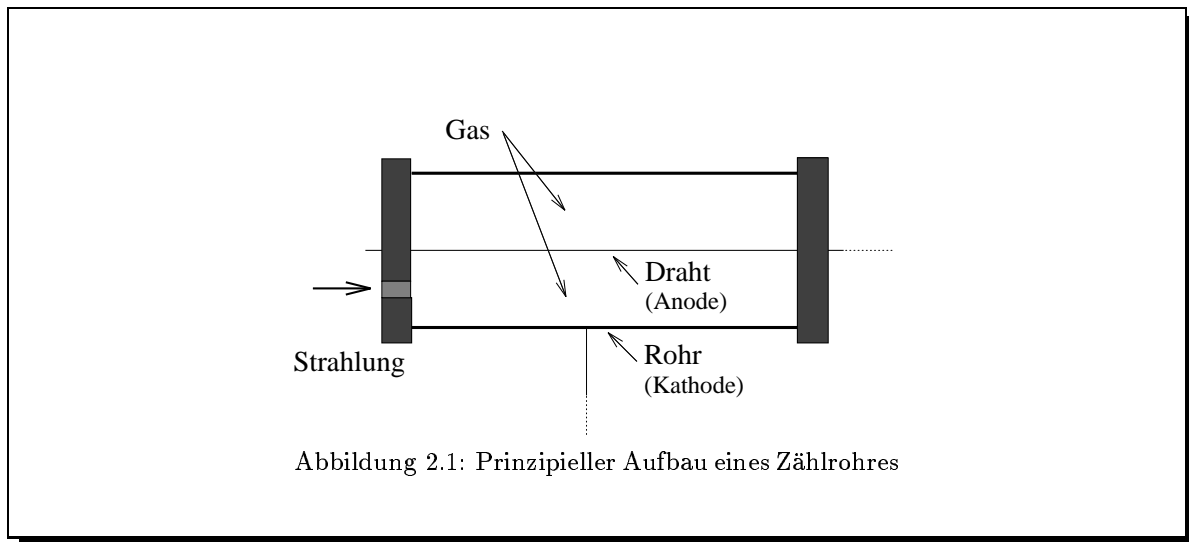


Abbildung 2.1: Prinzipieller Aufbau eines Zählrohres

2.2 Arbeitsbereiche

Die Höhe der angelegten Spannung ist von besonderer Bedeutung für das Verhalten des Zählrohres. Nach der Höhe dieser Spannung können 6 Bereiche unterschieden werden. Die Abhängigkeit der registrierten Ladung Q von der angelegten Hochspannung U und die Einteilung in die sechs Bereiche ist anhand Abbildung 2.2 ersichtlich.

Arbeitsbereich I

In dem Arbeitsbereich I arbeitet das Zählrohr, wenn die angelegte Spannung noch sehr gering ist. Wird nun ein Gasatom oder Gasmolekül durch ein eintreffendes Teilchen ionisiert, so können sich Elektronen und Atomrümpfe, aufgrund der geringen anliegenden Spannung, im allgemeinen nicht schnell genug voneinander entfernen. In einem Großteil der Fälle findet daher eine *Rekombination* statt. Auf diese Weise kann nur ein Teil der primär erzeugten Ladungsträger zu den Elektroden wandern. Je größer die Spannung wird, desto mehr Ladungsträger können einander „entwischen“, also desto mehr Ionen werden gesammelt.

Arbeitsbereich II

Dieser Bereich entspricht dem *Sättigungsbereich* einer Ionisationskammer. Es werden hier *alle* primär erzeugten Ladungsträger an den Elektroden gesammelt. Die anliegende Spannung hat also einen bestimmten Wert überschritten, so daß nicht — wie noch in Arbeitsbereich I — Rekombinationen auftreten können; die erzeugten Teilchen können sich stattdessen entkommen. Für die Detektion sind daher genau die Primär-Ladungen wichtig, die wirklich erzeugt wurden. Bei weiterem Ansteigen der Spannung kann die einfallende Strahlung nicht noch mehr Gasmoleküle ionisieren und im Bereich II tritt noch keine Sekundärionisation auf, die die Zahl der Ladungsträger erhöhen könnte. Da also die Zahl der vom Zählrohr abfließenden Ladungen trotz Spannungsänderung gleich bleibt, spielt die anliegende Spannung in diesem Bereich keine Rolle.

Die beiden Arbeitsbereiche I und II entsprechen einer normalen *Ionisationskammer*. Für diese Bereiche ist es typisch, daß die von den primären Ladungsträgern auf ihrer freien Weglänge durch die elektrische Feldstärke aufgenommene kinetische Energie kleiner ist als die Ionisierungsenergie der Gasatome bzw. -moleküle. Die Energie der Ionen wird somit durch nicht-ionisierende Stöße als kinetische Energie an das Gas wieder abgegeben, bevor sie einen Wert erreicht, der zur Ionisierung ausreichen würde.

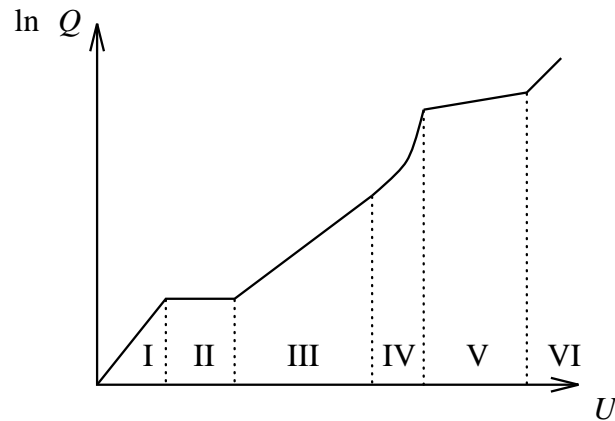


Abbildung 2.2: Arbeitsbereiche des Zählrohres

In den nun folgenden Bereichen laufen Prozesse ab, die typisch für ein Zählrohr sind. Es ist dies unter anderem die Erzeugung von Sekundärelektronen. Man sagt oft, die folgenden Arbeitsbereiche sind die eigentlichen Zählrohrbereiche.

Arbeitsbereich III

Wie in den vorangegangenen Arbeitsbereichen, so werden auch in diesem die erzeugten Ladungen durch das elektrische Feld beschleunigt. Insbesondere werden dabei die erzeugten Elektronen in Richtung Draht beschleunigt. Die dabei aufgenommene Energie geben sie jedoch wie oben zunächst durch Zusammenstöße mit den Gasatomen ständig wieder ab.

Um den entscheidenden Punkt zu verstehen, warum plötzlich Sekundärionisationen auftreten, wollen wir einen Ausdruck für die Feldstärke in einem Zylinderkondensator entwickeln:

Für den Betrag der elektrischen Feldstärke E im Abstand r vom Draht innerhalb des Zählrohrmantels gilt¹: $E \propto \frac{1}{r}$.

Für das Potential $U(r)$ gilt daher (wegen Radialsymmetrie eindimensionales Integral): $U(r) \propto \ln(r)$. Wir beachten nun die Randbedingungen für den Radius des Drahts r_i und den Radius bzw. Abstand des Zählrohrmantels r_a . Da wir die Spannung in bezug auf den Draht messen wollen, gilt nämlich $U(r_i) = 0$ und $U(r_a) = U_0$, wobei U_0 die am Zählrohr insgesamt anliegende Spannung ist. Unter Ausnutzung

¹Dies folgt direkt aus der 1. Maxwell'schen Gleichung in Integralform für einen Vollzylinder Z_r des Radius r :

$$Q_{\text{Draht}} = \int_{Z_r} \rho \, dV = \int_{\partial Z_r} E \, dA = E \cdot 2\pi r \cdot L,$$

wobei letzte Gleichung aus Radialsymmetrie und daher $E(r) \equiv \text{const}$ gilt (r ist ja der feste Radius des Zylinders). Nun sind die Länge L und die Kapazität C des Zählrohrs bauartabhängige, feste Konstanten, daher gilt bei fester angelegter Spannung U_0 mittels $Q = C \cdot U$:

$$E = \frac{CU_0}{2\pi L} \cdot \frac{1}{r} = \text{const} \cdot \frac{1}{r}.$$

Wir werden gleich einen anderen Ausdruck für die Proportionalitätskonstante suchen. Mit beiden Formeln könnten wir dann einen Ausdruck für C aus den Zählrohrdimensionen berechnen; dies werden wir aber nicht weiter verfolgen.

dieser Randbedingungen und der Proportionalität von U zu $\ln(r)$ erhalten wir die Beziehung

$$U(r) = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right).$$

Nach Differentiation erhalten wir für die Feldstärke:

$$E(r) = \frac{U_0}{r \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}.$$

Hieraus ersieht man, daß die Feldstärke in der Nähe des Drahtes sehr groß werden kann; sie erreicht Werte von $10^4 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$. Bei einer hinreichend hohen Spannung U_0 können also nun die Elektronen innerhalb ihrer freien Weglängen durch das Feld so stark beschleunigt werden, daß sie weitere Atome oder Moleküle durch Zusammenstöße zu ionisieren vermögen, also neue Elektronen und positive Ionen bilden können. Durch Wiederholung dieses Vorganges bildet sich eine *Elektronenlawine*.

Der Lawineneffekt wirkt nun gerade so, daß die gesammelte Ladungsmenge um einen Faktor A gegenüber der Primärisation größer ist ($Q_{\text{Sammel}} = A \cdot n \cdot e$; dabei ist n die Zahl primärer Ionen). A besagt also, daß im Bereich III von jedem Primärelektron im Mittel eine Lawine mit A Elektronen erzeugt wird. In diesem Bereich kann das Zählrohr also zur Energiebestimmung der einfallenden Strahlen benutzt werden. Die Zahl der entstehenden Primärelektronen ist nämlich proportional zur Energie der einfallenden Teilchen und da A — wie dargelegt — eine Proportionalitätskonstante ist, ist auch die gemessene Ladung Q_{Sammel} proportional zur Teilchenenergie. Dieser Bereich wird daher auch *Proportionalbereich* genannt. Jede Elektronenlawine läuft unabhängig von den anderen Lawinen ab. Der Faktor A hängt von der Gasart und den Zählrohrdimensionen ab. Seine Abhängigkeit von der Spannung ist schwierig zu bestimmen (vgl. [FN]), sie ist aber im wesentlichen exponentiell. Daher kann die $\ln Q$ - U -Abhängigkeit annähernd als Gerade dargestellt werden.

Arbeitsbereich IV

In diesem Bereich macht sich bemerkbar, daß die exponentielle Abhängigkeit des A von der anliegenden Spannung U nicht ideal ist. Dies liegt vor allem daran, daß hier ein weiterer Prozeß an Bedeutung zu gewinnen beginnt, der in sehr geringem Maße zwar schon in Arbeitsbereich III vorhanden war, eigentlich aber erst für die folgenden Arbeitsbereiche richtig wichtig wird, weil er dort für das gesamte Geschehen verantwortlich ist. An dieser Stelle verstärkt er nur das über-exponentielle Ansteigen des Verstärkungsfaktors A .

Es handelt sich dabei um den Effekt, daß das Gas durch Stöße nicht nur ionisiert wird, sondern auch angeregt wird und daraufhin Photonen aussendet. Diese ihrerseits ionisieren an anderen Stellen im Zählrohr. Bei der Diskussion über das Löschen diskutieren wir, daß diese Stellen das Kathodenmaterial bzw. der zugesetzte mehratomige Dampf sein werden.

Die herausgeschlagenen Photoelektronen vergrößern die gemessene Ladung durch zusätzlich entstehende Lawinen. Der beschriebene Prozeß hängt aber nicht nur von der Teilchenenergie ab, sondern z. B. auch davon, wo die Primärelektronen erzeugt wurden. Es besteht daher nur noch eine eingeschränkte Proportionalität. Daher wird dieser Bereich auch *eingeschränkter Proportionalbereich* genannt.

Ein zusätzlicher Effekt, der auftreten würde, wenn er nicht durch die unterschiedlichen Lösch-Techniken verhindert würde, ist der, daß die zurückbleibenden Kationen beim Auftreffen auf den Zählrohrmantel, also auf das Kathodenmaterial, dort weitere Elektronen über den Photoeffekt auslösen können. Wir besprechen dies noch genauer in Abschnitt 2.4.

Arbeitsbereich V

Im letzten Bereich wirkten die Photoelektronen durch angeregte Gasatome derart, daß zusätzliche Lawinen entstanden. Somit erhöhte sich die registrierte Ladung. In dem Bereich V nun nimmt dieser Effekt

die dominierende Stellung ein. Die Zahl der gebildeten Photonen nimmt mit zunehmender Spannung sehr schnell zu. Es entstehen so viele Elektronenlawinen, daß sie sich über das gesamte Zählrohr ausbreiten. Dadurch wird die gesamte Umgebung des Zählrohrdrahtes ionisiert. Somit ist die dabei gebildete Ladungsmenge ausschließlich eine Funktion der Zählrohrlänge und nur in geringem Maße des angelegten äußeren Feldes, denn bei einer Erhöhung der Spannung kann kaum noch mehr ionisiert werden. In dem Q - U -Diagramm (Abb. 2.2) wird dieses Verhalten als Plateau sichtbar. Man nennt dieses Plateau auch *Charakteristik des Zählrohrs*. Gute Zählrohre zeigen eine flache Charakteristik von ungefähr 0,02% Anstieg der Impulse pro 100 V. Die am Zählrohrwiderstand beobachteten Impulse sind bei Konstanthalten der Spannung fast gleichgroß und unabhängig von der Primärionisation, weil immer die gesamte Drahtumgebung völlig ionisiert wird. Daher kann man hier nicht — wie noch im Proportionalbereich — Energiemessungen der eintreffenden Strahlung vornehmen. Stattdessen ist dieser Bereich zur Zählung der Strahlung geeignet, weil jedes Teilchen einen gleich starken Impuls erzeugt.

Man nennt diesen Arbeitsbereich den *Geiger-Müller Bereich*, *Zählbereich* oder *Auslösbereich*.

Wir können also feststellen, daß, nachdem ein Teilchen registriert wurde, ein Ionenschlauch um den Draht zurückbleibt. Die Effekte, die entstehen, wenn sich dieser Schlauch auflöst, werden wir bei der Totzeit (Abschnitt 2.3) eingehender darlegen.

Arbeitsbereich VI

Nun ist die anliegende Feldstärke so groß geworden, daß die Maßnahmen zur Löschung des Zählrohrs nicht mehr wirken. Wir haben schon angedeutet, daß dann die Kationen auf den Zählrohrmantel treffen und dort Elektronen auslösen (bei der Löschung gehen wir genauer darauf ein). Diese wirken so, als ob ein Strahlungsteilchen in das Zählrohr gelangt ist. Direkt, nachdem das erste Teilchen registriert wurde, meldet das Zählrohr ein neues, usw. Es tritt also eine Dauerentladung ein. Dies sollte möglichst vermieden werden, da sonst das Zählrohr Schaden nehmen wird.

2.3 Tot- und Erholzeit

Der für uns interessante Bereich ist der Arbeitsbereich V. Wir haben bei der obigen Beschreibung festgestellt, daß ein ganzer Schlauch um den Zählrohrdraht ionisiert wird. Die gebildeten Elektronen wandern schnell zum Draht (in 10^{-7} bis 10^{-8} sec), die wesentlich trägeren Ionen verbleiben aber erst mal, wo sie sind, und schirmen den Draht gewissermaßen ab. Es kommt also zu der Ausbildung einer positiven Raumladungswolke um den Zählrohrdraht. Diese Wolke hat zwei Effekte. Der Haupteffekt ist der, daß das Feld im Raum zwischen dieser Ladungswolke und dem Zählrohrdraht so weit herabgesetzt wird, daß neu ankommende Elektronen keine Lawinen mehr bilden können. Wäre der Effekt, daß Photonen angeregter Gasatome andernorts neue Elektronen herausschlagen können, der einzige, so wäre das Zählrohr zu diesem Zeitpunkt bereits gelöscht. Die positive Kationen-Wolke wandert wegen des außen wirkenden Feldes zur Kathode, aber nur langsam. Sie benötigt bis zum Auftreffen auf den Zählrohrmantel ungefähr 10^{-4} sec. Erst wenn der Raumladungsmantel ein bestimmtes Stück nach außen abgewandert ist, nimmt die Feldstärke innerhalb wieder den Wert an, der der Einsatzspannung des Zählrohrs entspricht. Während der Zeit, die dieses „Abwandern“ der Ionenwolke dauert, ist der Zähler völlig unempfindlich. Diese Zeit wird daher *Totzeit* genannt.

Anschließend an diese Periode treten zunächst Impulse mit zu kleinen Amplituden auf, die allmählich wachsen und ihre volle Höhe dann erreichen, wenn die positive Ladungswolke die Kathodenoberfläche, also den Zählrohrmantel, erreicht hat. Dieser zweite Zeitabschnitt wird als *Erholzeit* bezeichnet.

Der zweite Effekt der Kationenwolke ist nur für das nicht-selbstlöschende Zählrohr von Bedeutung. Wir gehen dort näher darauf ein. Wir erwähnen aber schon hier, daß bei diesem Zählrohr die Registrierfähigkeit von außen für ungefähr 10^{-2} sec ausgeschaltet wird. Bei einem solchen nicht-selbstlöschenden Zählrohr hat man also eine, mit ungefähr 10^{-2} sec extrem lange Totzeit, aber keine Erholzeit.

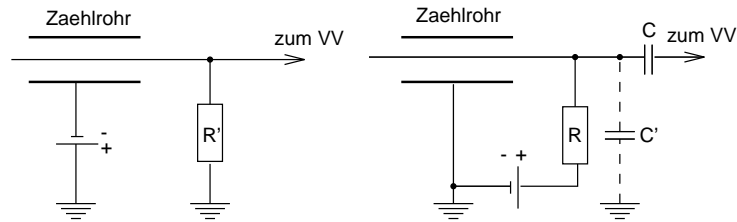


Abbildung 2.3: Typische Zählrohrschaltungen; links: selbstlöschendes Zählrohr; rechts: nicht-selbstlöschendes Zählrohr mit hochohmigem R ($> 100 \text{ M}\Omega$) und evtl. C' zur Steuerung der Zählrohrkapazität.

2.4 Löschung von Zählrohren

Unter dem *Löschen* des Zählrohrs versteht man das Verhindern der Erzeugung neuer Elektronen durch Effekte, die nicht von neuer eingetretener Strahlung ausgehen, *nachdem* ein Teilchen registriert wurde. Bei der näheren Erklärung der Methoden zum Löschen von Zählrohren muß zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Zählrohrtypen unterschieden werden. Es sind dies das *nicht-selbstlöschende Zählrohr* und das *selbstlöschende Zählrohr*.

Natürlich ist das Löschen erst ab dem Arbeitsbereich IV von Interesse, denn vorher treten ja überhaupt keine Effekte auf, von denen unkontrolliert neue Elektronen erzeugt werden könnten.

Nicht-selbstlöschende Zählrohre

Wir wollen zunächst die Effekte im nicht-selbstlöschenden Zählrohr näher beschreiben. Solche Zählrohre haben meist nur eine einatomige Edelgasfüllung. Diese Edelgase werden also zum einen ionisiert und bewirken die normalen Elektronenlawinen; zum anderen werden sie angeregt. Daraufhin senden sie bei der Abregung Photonen aus. Diese besitzen natürlich nicht genug Energie, um andere Edelgasatome zu ionisieren. Deshalb gelangen die Photonen im wesentlichen direkt zum Zählrohrmantel. Dieses Metall können sie nun mittels Photoeffekt ionisieren. Die so entstehenden Elektronen laufen wieder zum Zählrohrdraht und bewirken weitere Lawinen, bis die gesamte Drahtumgebung ionisiert ist. Wenn dies erreicht ist, haben weitere Elektronen keine Wirkung mehr und der Effekt kommt zunächst zum Erliegen. Nun wandern — wie beschrieben — die Kationen zum Zählrohrmantel. Wenn diese auftreffen, so lösen sie mit ihrer Ladung ein Elektron aus der Kathode heraus. Sie sind damit zwar neutral, aber das Elektron ist noch angeregt. Das daraufhin ausgestrahlte Photon kann nun ein weiteres Elektron aus der Kathode herausschlagen. Dieses neue Elektron würde nun wieder Lawinen erzeugen und alles begänne von vorne. Genau dies wird durch das Löschen verhindert.

Beim nicht-selbstlöschenden Zählrohr geschieht dies von außen mittels der rechts in Abbildung 2.3 dargestellten Schaltung. Der Kondensator C zusammen mit der Zählrohrkapazität und der hochohmige Widerstand R bilden einen Hochpaß. Dabei ist die Zeitkonstante $\tau = RC$ so eingerichtet, daß sie zwei Größenordnungen über der Zeit liegt, die die Kationen brauchen, um vom Draht zum Mantel zu wandern, also bei ungefähr 10^{-2} sec. In dieser Zeit fließt also die gesammelte Ladung ab. Wenn das Zählrohr in Ruhe ist, hat es unendlichen Widerstand, die gesamte Spannung fällt also am Zählrohr ab. Wenn die Elektronen, die aus den Lawinen kommen, abfließen, fällt ein wesentlicher Teil der Spannung am Widerstand R ab, die Spannung am Zählrohr ist entsprechend geringer, und zwar so gering, daß

die von den Kationen herausgeschlagenen Elektronen keine Lawinen mehr auslösen können. An dieser Stelle kommt der zweite Effekt der Kationen-Wolke zum Tragen: Die positive Wolke hält die Elektronen durch die Coulombkraft lange genug auf dem Draht, so daß sie nicht zu schnell abfließen. Täten sie das nämlich, so könnte die Spannung am Zählrohr bereits wieder zu groß sein, wenn die Photoelektronen auf den Draht treffen. Wir sehen, daß im wesentlichen die ganze Zeit τ das Zählrohr unempfindlich ist, τ ist also die Totzeit unseres Zählrohrs. Diese Totzeit ist so groß, daß heute nicht-selbstlöschende Zählrohre nur noch selten verwendet werden.

Selbstlöschende Zählrohre

Selbstlöschende Zählrohre haben meist eine Füllung aus einem Edelgas, z. B. Argon, und einem mehratomigen Gas, zumeist Alkoholdampf (wir werden das Folgende immer am Beispiel Alkohol erläutern). Wie beim nicht-selbstlöschenden Zählrohr senden die Edelgasatome Photonen aus. Die Photonen können aber hier bereits von den Alkoholmolekülen eingefangen werden und diese ionisieren. Schon hier entstehen die neuen Elektronen, die für die Ausbreitung der Lawinen verantwortlich sind. Bei selbstlöschenden Zählrohren breitet sich die Ionenwolke also über diesen Effekt sehr schnell seitlich aus. Wie beim nicht-selbstlöschenden Zählrohr kommt dieser Effekt durch die Ionenwolke zunächst zum Erliegen.

Das Löschen hat wieder zum Ziel, daß die Kationen keine Elektronen aus dem Kathodenmaterial heraus schlagen können. Dies funktioniert hier durch die mehratomigen Alkoholmoleküle. Denn auf dem Weg zum Zählrohrmantel treffen die Kationen auf die Alkoholmoleküle. Da deren Ionisierungsenergie kleiner ist als die Elektronenaffinität der Kationen, nehmen die Kationen ein Elektron auf und die Alkoholmoleküle werden zu neuen Kationen. Was passiert nun, wenn die Alkoholkationen auf den Zählrohrmantel treffen? Als Kation lösen auch sie zuerst ein Elektron aus der Kathode aus. Das Elektron ist angeregt, aber anstatt ein Photon auszusenden, dissoziiert das Molekül. Dadurch, daß die Alkoholmoleküle die Ladung übernommen haben, verhindern wir also die Erzeugung von Photoelektronen, weil die Alkoholmoleküle aufspalten. Sie werden dabei unbrauchbar, ein selbstlöschendes Zählrohr muß also von Zeit zu Zeit neu gefüllt werden.

In beiden Fällen reichen bei zu starker angelegter Spannung die Maßnahmen zum Löschen nicht aus. Es kommt zur Dauerentladung. Wir haben dies beim Arbeitsbereich VI beschrieben.

3. Die Meßdaten

3.1 Das Plateau des Zählrohrs

Im ersten Versuchsteil interessiert uns das Plateau des Zählrohrs. Wir maßen daher in Abhängigkeit der am Zählrohr anliegenden Hochspannung die Zahl der counts, die das Zählrohr in 300 sec registrierte. Quelle der registrierbaren Counts war ^{137}Cs , das in der linken Befestigung vor dem Zählrohr angebracht war. Wir maßen:

U [V]	counts in 300sec
450	11585
500	18118
550	19248
600	19705
650	20249
700	20989
750	21575
800	21692

3.2 Totzeit

In diesem Versuchsteil wollen wir die Totzeit unseres Zählrohrs nach den zwei verschiedenen Methoden bestimmen. Für die Zwei-Präparate-Methode bestimmten wir dazu folgende Meßwerte:

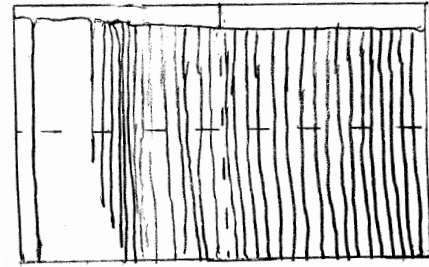
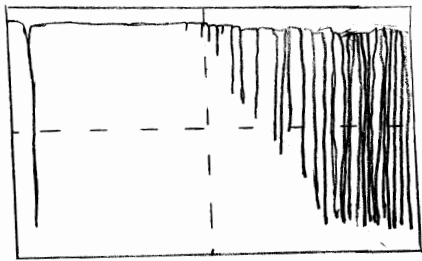
U [V]	Präparat 6 links counts in 300sec	Präparat 7 rechts counts in 300sec	beide counts in 300sec
500	17936	25030	32013
600	19883	28253	37809
700	21178	30782	42355

Bei der zweiten Methode liest man einfach am Oszilloskop ab. Wir markieren hier die schwierig abzulesenden Meßwerte und kommentieren diese dann in der Auswertung. Unsere Ablesungen:

U [V]	Totzeit [msec]	\pm Fehler \pm [msec]	Erholzeit [msec]	\pm Fehler \pm [msec]	Markierung
500	3,0	± 1	16	± 2	
600	2,0	± 1	10	± 3	o •
700	1,5	± 1	7	± 4	• •

Es folgen nun die Bilder des Oszilloskopschirms, die wir beim Versuch per Hand abgezeichnet und hier eingescannt haben. Auch diese kommentieren wir in der Auswertung.

Links befindet sich das qualitative Bild für die Meßwerte bei $U = 500\text{V}$, rechts dasjenige für $U = 700\text{V}$:



Das Bild für die Messung bei $U = 600\text{V}$ lag zwischen diesen beiden Bildern. Da sich daraus nichts Neues ergibt, verzichten wir hier auf das Einscannen.

3.3 Verteilungen

3.3.1 Poissonverteilung

Für die Aufnahme einer Poissonverteilung führten wir 210 Messungen durch. Jede Messung dauerte 1 sec und wurde bei einer Spannung von 600 V am Zählrohr ausgeführt. Leider waren wir so *dämlich*, das schwächere Präparat ^{137}Cs (wenigstens etwas: nicht das Stärkere...), in die linke Befestigung vor dem Zählrohr zu stellen und nicht in die Befestigung oben auf der Fensterbank.

Also hier die Meßwerte:

Counts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0_	67	67	64	62	62	57	74	59	63	73
1_	70	66	56	65	73	62	70	64	63	60
2_	63	59	67	64	62	70	55	62	57	67
3_	71	68	61	54	70	63	68	59	65	66
4_	75	74	64	70	69	60	69	59	61	65
5_	69	67	79	58	65	57	66	73	65	72
6_	79	66	72	55	79	61	61	64	69	67
7_	71	61	51	70	78	71	65	61	68	64
8_	63	69	68	71	63	66	70	61	67	63
9_	55	65	68	68	69	65	70	70	63	63
10_	70	56	65	62	58	66	77	69	72	70
11_	67	71	63	67	74	62	69	65	65	73
12_	63	71	67	57	68	60	74	70	67	81
13_	76	67	73	66	65	62	64	64	68	77
14_	69	59	70	57	62	68	72	64	57	63
15_	66	59	61	67	66	69	53	73	61	67
16_	66	68	63	70	69	72	71	63	54	74
17_	63	60	81	69	66	60	58	60	64	73
18_	69	69	59	76	69	57	62	69	73	61
19_	80	61	67	66	65	63	60	66	61	62
20_	67	60	69	60	70	59	63	74	62	66

3.3.2 Gaußverteilung

Für die Aufnahme einer Gaußverteilung führten wir 400 Messungen durch. Jede Messung dauerte 30 sec und wurde wiederum bei einer Spannung von 600 V am Zählrohr ausgeführt. Das Präparat befand sich an der gleichen Stelle wie bei der Poissonverteilung.

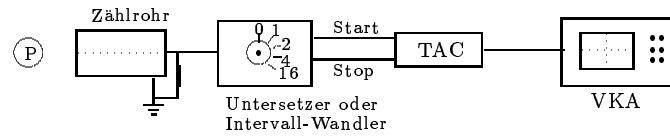
Hier unsere Meßwerte:

Counts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1_	2002	2005	1989	1968	2022	1971	2049	1935	1986	1981
2_	2062	1977	1966	2013	1952	2022	1953	1994	1970	1953
3_	2015	1936	1951	1988	1999	1993	1940	1983	1967	2015
4_	1969	1899	1973	2006	1977	2030	2008	2033	1930	1957
5_	1987	1966	1991	1990	2071	2015	1939	1962	1940	1963
6_	1911	1974	1944	1926	1995	2002	1975	1927	1946	2029
7_	1967	2016	1998	2013	1930	1969	2037	1963	1888	2014
8_	1994	1939	2068	1971	1956	1969	1993	1958	2002	1943
9_	2014	1968	2007	2009	1958	1995	1952	2020	1966	2027
10_	1926	1948	2009	2025	1945	1951	2070	1997	2072	1965
11_	1985	1956	1935	1956	1943	2014	1996	2004	1972	1961
12_	1989	1948	1940	1964	1977	1923	2048	1971	2030	1969
13_	1936	1979	1979	1974	1984	1964	2056	2001	2010	1991
14_	2000	2014	1986	1972	1984	1919	1974	1969	1986	1919
15_	1924	1936	1997	2025	1989	1995	2063	2020	1995	1934
16_	2015	1985	2045	1902	1977	2001	2041	2073	1984	1980
17_	1977	2007	1962	2044	1995	1975	1964	1988	2011	1973
18_	1951	1962	1973	1961	1963	1963	1982	2008	1984	1943
19_	2000	1946	1928	1951	2015	1984	1946	1945	1933	1966
20_	1926	2013	2011	2077	1930	1966	2023	2014	2009	1995
21_	2020	2007	2024	1915	1946	1979	1971	2025	2060	1966
22_	2043	2006	1937	1986	1939	1998	2031	1964	1983	1982
23_	2014	1934	1968	2016	2047	2004	1955	2023	1918	2002
24_	1882	1992	1939	1941	1974	1970	1916	2035	1994	1949
25_	1979	2028	2011	1924	2006	1960	2013	1983	1994	1991
26_	1960	1923	2009	1980	1957	1964	1947	1990	1998	1977
27_	1944	1953	1946	1951	1927	2009	2003	2025	2046	2017
28_	1954	1945	1903	2003	1937	1947	1960	2007	1916	1983
29_	1944	1948	1957	1969	1945	2008	1969	1990	1978	1980
30_	2032	2044	2071	2024	1957	2041	1978	1979	2004	1949
31_	2000	1964	1946	2019	2003	1962	2018	2005	1990	2016
32_	1999	2002	2022	1934	1945	1966	1958	1953	1975	1971
33_	1943	1974	2008	2012	2002	1948	2015	1999	1944	2016
34_	1968	2020	1965	1981	2008	1976	2024	2004	2077	2015
35_	1991	1998	1962	1984	1988	1982	1917	1981	1971	1980
36_	1987	2008	1913	1957	2003	2004	1971	2055	1958	1971
37_	1960	2035	1949	1954	2016	1953	2070	1979	1969	1931
38_	1941	1950	2031	1963	1955	2033	1965	2002	2060	1986
39_	2014	1962	2001	1948	2013	2027	2003	1915	1911	1958
40_	1961	2008	1985	1991	1944	2032	1930	2001	1987	1981

Zum Vergleich: Eine Messung der Hintergrundstrahlung, also ohne Präparat, über den gleichen Zeitraum ergab 289 counts.

3.4 Intervallverteilung

Zur Messung der Intervallverteilung nutzen wir folgenden Aufbau:



P: Probe
 TAC: Time to amplitude converter
 VKA: Vielkanalanalysator (uralt...)

Wir wollen hier diesen Aufbau kurz beschreiben: Das Zählrohr meldet jeden detektierten Zerfall der Probe an den Intervall-Wandler. Dieser ist ein Untersetzer, d. h. er gibt den ersten detektierten Zerfall als Start-Signal weiter an den *Time to amplitude converter*, kurz TAC genannt. Nun zählt der Untersetzer und gibt nach einem weiteren, zwei weiteren, 4 weiteren oder 16 weiteren Signalen ein Stoppsignal an den TAC weiter, je nachdem, ob man eine Intervallverteilung mit $s = 1$, $s = 2$, $s = 4$ oder $s = 16$ aufnehmen möchte. Realisiert werden kann ein solcher Untersetzer einfach durch einen Zähler und die Phasenverdopplung an den einzelnen FlipFlops des Zählers, was wir genauer in Versuch 8c (vgl. [FP-8c]) beschrieben haben. Der TAC nun wandelt die Zeitdauer zwischen Start- und Stoppsignal in die Höhe seines Ausgangssignals um. Die Funktionsweise des TAC ist im Detail im Koinzidenzversuch (vgl. [FP-7]) von uns beschrieben worden. Der Vielkanalanalysator VKA ordnet nun die verschiedenen Amplitudenhöhen verschiedenen Kanälen zu. Bei der Intervallverteilung zählt jeder Kanal des VKA also, wie häufig es vorgekommen ist, daß genau zwei, drei, fünf oder 17 Kernzerfälle in einem bestimmten Zeitintervall stattgefunden haben.

4. Auswertung

4.1 Die Totzeit

4.1.1 Ablesen am Oszilloskop

Wir haben bereits erwähnt, daß wir einfach die Totzeit am Oszilloskop ablesen können. Typische Oszilloskopbilder haben wir auf Seite 27 gezeigt. Als erste Frage zu den Bildern mag sich stellen, warum eigentlich nach der Totzeit vom ersten Peak ganz viele Peaks kommen. Sollten diese nicht auch eine Totzeit nach sich ziehen, in der kein Peak registriert werden kann? Nun, beim Oszilloskop triggern wir natürlich auf einen Peak. Dieser erste Peak löst also den Trigger aus und erscheint immer an derselben Stelle. Der nächste registrierbare Zerfall ist natürlich wieder statistisch verteilt und kommt nicht zum festen Zeitpunkt $\tau + t_0$ oder so. Daher sehen wir viele verschiedene Peaks für all diese Zerfälle. Insbesondere erkennen wir an der Höhe der Peaks, wie sich das Zählrohr erholt. Durch das Triggern können wir also an einem Bild die Totzeit und die Erholzeit ablesen.

Bei der Spannung $U = 500\text{V}$ am Zählrohr hatten wir keine größeren Probleme beim Ablesen. Das Oszilloskop war geeignet einstellbar und das einzige Problem war, die kleinen Peaks von der Höhe her richtig zu extrapolieren, um die Totzeit exakt ablesen zu können.

Bei $U = 600\text{V}$ gab es schon mehr Probleme. Die Erholzeit konnte unmöglich genau abgelesen werden, da die Signale ungefähr 45V betragen. Wir konnten aber nur maximal 40V einstellen (8 Einheiten à 5V (maximale Einstellung)). Da wir die Erholzeit im folgenden nicht benötigen, ist dies aber nicht weiter dramatisch; wir haben halt die Erholzeit dadurch abgeschätzt, daß wir die y -Achse nach oben und unten geschoben haben. Die Totzeit exakt abzulesen, war dadurch erschwert, daß die Höhe der ersten wieder registrierten Peaks schwankte. Statt $\tau = 2,0\text{ sec}$ hätten wir ebenso berechtigt $\tau = 2,4\text{ sec}$ ablesen können. Unser Fehler ist aber groß genug angenommen. . .

Die Messung bei $U = 700\text{V}$ war mit Sicherheit die Unangenehmste (vgl. Scan auf Seite 27). Die Signalhöhe betrug nun ungefähr 60V . Das Ablesen der Erholzeit war kein Ablesen, sondern Abschätzen, also keine Messung, sondern ein Ratespiel. Aber — wie gesagt — wir brauchen die Erholzeit ja nicht. Zum Ablesen der Totzeit: Die Peaks zitterten hin und her und das bei einem steilen Anstieg der folgenden Peaks. Mehr als eine extrem grobe Größenordnungsabschätzung ist unser Meßwert hier also nicht. Von „einfachem Ablesen vom Oszi“ kann also keine Rede sein.

Wie bereits erwähnt benötigen wir die Erholzeitwerte im folgenden nicht. Aus diesem Grunde wiederholen wir hier nur die Totzeitwerte nochmal, um sie gleich vergleichen zu können:

$$\tau_{500\text{V}} = 3,0 (\pm 1,0) \text{ msec}$$

$$\tau_{600\text{V}} = 2,0 (\pm 1,0) \text{ msec}$$

$$\tau_{700\text{V}} = 1,5 (\pm 1,0) \text{ msec}$$

4.1.2 Zwei-Präparate-Methode

Wir wollen nun die Totzeiten mit der zweiten Methode bestimmen. Dazu benutzen wir die Gleichung (1.10) und setzen dort unsere Zählraten, die wir direkt aus den Meßwerten berechnen, ein.

Zuvor müssen wir uns noch ein paar Gedanken über Fehler machen. Wären unsere counts N bereits totzeitkorrigiert, so wären sie poissonverteilt, d. h. für den Fehler gälte: $\sigma = \sqrt{N}$. Unsere Werte sind aber natürlich noch nicht totzeitkorrigiert. Auf Seite 17 haben wir hergeleitet, daß die gemessene Verteilung dann schmaler ist als eine poissonverteilte¹. Wir werden also einfach die Wurzeln aus N ziehen, dies auf Zehner-Stellen abrunden (d. h. ungefähr zwei signifikante Stellen) und als Fehler verwenden. Auch nach der Umrechnung auf Zählraten werden wir es nochmal wagen, abzurunden. Wir erhalten dann damit Größenordnungsabschätzungen für den Totzeitfehler, der zugleich eine obere Grenze für den σ -Fehler ist, also eine sehr sichere Schätzung für den Totzeitfehler.

Bevor wir jetzt ans Rechnen gehen, müssen wir noch mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung (1.5) einen Ausdruck für den Totzeitfehler aus Gleichung (1.10) ermitteln. Es ergibt sich:

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{a_{1+2}^* - a_2^*}{4 a_1^{*3} a_2^* (a_{1+2}^* - a_1^*)} (\Delta a_1^*)^2 + \frac{a_{1+2}^* - a_1^*}{4 a_1^* a_2^{*3} (a_{1+2}^* - a_2^*)} (\Delta a_2^*)^2 + \frac{(2 \sqrt{a_1^* a_2^* + (a_{1+2}^*)^2} - a_{1+2}^* a_1^* - a_{1+2}^* a_2^* \sqrt{a_1^*} \sqrt{a_2^*} - 2 a_1^* a_2^* + a_{1+2}^* a_1^* + a_{1+2}^* a_2^*)^2}{(4 a_1^* a_2^* + 4 (a_{1+2}^*)^2 - 4 a_{1+2}^* a_1^* - 4 a_{1+2}^* a_2^*) (a_{1+2}^*)^4 a_1^* a_2^*} (\Delta a_{1+2}^*)^2$$

In der folgenden Tabelle sind nochmal unsere Meßwerte N_i aufgeführt, deren Fehler (d. h. unsere Abschätzung) und die Umrechnung davon auf Zählraten.

U [V]	N_1	$N_1^{\frac{1}{2}}$	N_2	$N_2^{\frac{1}{2}}$	N_{1+2}	$N_{1+2}^{\frac{1}{2}}$	a_1^*		a_2^*		a_{1+2}^*	
							[sec ⁻¹]	[sec ⁻¹]	[sec ⁻¹]	[sec ⁻¹]	[sec ⁻¹]	[sec ⁻¹]
500	17936	130	25030	150	32013	170	59,79	0,43	83,43	0,50	106,71	0,56
600	19883	140	28253	160	37809	190	66,28	0,46	94,18	0,53	126,03	0,63
700	21178	140	30782	170	42355	200	70,59	0,46	102,43	0,56	141,18	0,66

Hieraus berechnen wir nun mit den zitierten Formeln die Totzeit und deren Fehler:

$$\begin{aligned}\tau_{500V} &= 4,99 (\pm 0,13) \text{ msec} \\ \tau_{600V} &= 3,55 (\pm 0,10) \text{ msec} \\ \tau_{700V} &= 2,73 (\pm 0,09) \text{ msec}\end{aligned}$$

Vergleich

Die Zwei-Präparate-Totzeitwerte sind deutlich größer als die aus der Oszilloskopmethode. Offensichtlich gehören kleinere Peaks, die wir der Erholzeit zugerechnet haben, noch zur Totzeit, da ihre Signale noch so klein sind, daß wir sie zwar auf dem Oszilloskop recht deutlich erkennen konnten, sie aber dennoch nicht vom Zähler registriert wurden. Da die Signalstärke mit der Hochspannung ansteigt, sinkt die Abweichung mit der Hochspannung ab, was mit unserer Erklärung konsistent ist.

Da wir also beim Totzeitablesen auf eine bestimmte Signalhöhe hätten achten müssen, woher wir auch immer diese Höhe herbekommen hätten sollen, können wir nur abschließend sagen, daß die Oszilloskopmethode recht zweifelhaft ist. Gott sei Dank haben wir mit der Zwei-Präparate-Methode eine

¹Es gilt ja: $\frac{\sigma_x}{\mu} = \frac{\sigma_{x^*}}{\mu^*}$. Mit $\sigma_x = \sqrt{N_{\text{wahr}}}$, $\mu = N_{\text{wahr}}$ und $\mu^* = N$ erhalten wir also: $\sigma_{x^*} = \frac{N}{\sqrt{N_{\text{wahr}}}} < \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$, da

$N_{\text{wahr}} > N$. Das folgende (Rechnen mit \sqrt{N}) ist also sinnvoll.

zuverlässige Methode zur Totzeitbestimmung zur Verfügung. Wir benutzen im folgenden also, wenn wir bei $U = 600\text{V}$ gemessen haben, den Totzeitwert

$$\tau_{600\text{V}} = 3,55 (\pm 0,10) \text{ msec} .$$

4.2 Das Zählrohrplateau

4.2.1 Unkorrigiertes Plateau

Wir plotten hier das Plateau des Zählrohrs mit den gemessenen unkorrigierten Werten. Dabei benutzen wir als Fehler wieder die Wurzel \sqrt{N} aus der Zahl der counts, die wir mit N bezeichnen. Zu dieser Wahl haben wir uns im letzten Abschnitt, der Zwei-Präparate-Methode, ausführlicher geäußert. Da wir zur Totzeitkorrektur immer auch die Zählrate kennen müssen, werden wir schon hier die Zählraten berechnen und diese in Abhängigkeit der Hochspannung plotten.

Es ergeben sich folgende Tabelle und folgender Plot:

U [V]	N	\sqrt{N}	a^* [sec ⁻¹]	Δa^* [sec ⁻¹]
450	11585	107,634	38,6167	0,358779
500	18118	134,603	60,3933	0,448677
550	19248	138,737	64,16	0,462457
600	19705	140,374	65,6833	0,467915
650	20249	142,299	67,4967	0,47433
700	20989	144,876	69,9633	0,482919
750	21575	146,884	71,9167	0,489614
800	21692	147,282	72,3067	0,49094

Um eine Gerade an das Plateau anzupassen, haben wir den ersten Wert für $U = 450\text{V}$ aus den Meßwerten genommen, da er noch ganz offensichtlich nicht zum Plateau, sondern zur Zone IV, wie wir sie auf Seite 22 in Abschnitt 2.2 beschrieben haben, gehört. An den anderen Punkten erkennt man schon jetzt recht deutlich das Plateau. Die mittels linearer Regression angepaßte Gerade ist bereits in Plot 4.1 eingezeichnet und gehorcht der Gleichung:

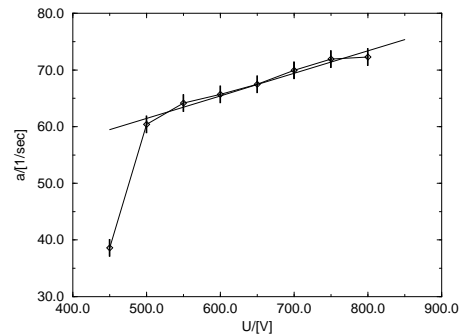


Abb. 4.1: Unkorrigiertes Zählrohrplateau

$$a^*(U) = (0,03967 \pm 0,00314) \frac{1}{\text{V sec}} \cdot U + (41,63 \pm 2,06) \frac{1}{\text{sec}} .$$

Aus der Steigung dieser Geraden erhalten wir die Steigung in % pro 100V, indem wir die Steigung der Geraden mit 100 multiplizieren und den daraus erhaltenen Zählratenanstieg pro 100V auf die Zählrate bei 650V (mittlerer Wert aus dem Bereich, der uns interessiert) beziehen. Wir erhalten:

$$\text{Plateau-Anstieg} = (5,88 \pm 0,47)\% \text{ pro } 100\text{V} .$$

4.2.2 Totzeitkorrigiertes Plateau

Wir totzeitkorrigieren nun die Zählraten a^* mittels Gleichung (1.9). Für den Fehler Δa gilt nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung (1.5):

$$\Delta a = \frac{1}{(1 - a^*\tau)^2} \sqrt{(\Delta a^*)^2 + (a^*)^4 (\Delta \tau)^2} .$$

Leider können wir nur die Zählraten für 500V, 600V und 700V totzeitkorrigieren, für die anderen Spannungen haben wir ja keine Totzeiten bestimmt. Es ergeben sich folgende korrigierte Werte:

U [V]	a^* [sec ⁻¹]	Δa^* [sec ⁻¹]	τ [10 ⁻³ sec]	$\Delta \tau$ [10 ⁻³ sec]	a [sec ⁻¹]	Δa [sec ⁻¹]
500	60,3933	0,448677	4,99	0,13	86,444	1,337
600	65,6833	0,467915	3,55	0,10	85,6563	1,0824
700	69,9633	0,482919	2,73	0,09	86,481	0,999

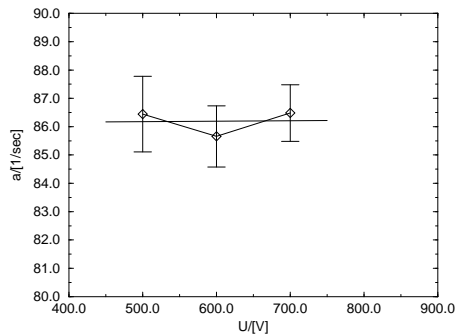


Abb. 4.2: Totzeitkorrigiertes Plateau

Nebstehend plotten wir nun also das totzeitkorrigierte Zählrohrplateau. Auch hier passen wir mittels linearer Regression eine Gerade an, die in Abbildung 4.2 eingezeichnet ist. Da wir aber nur drei Meßpunkte zur Verfügung haben, sind die errechneten Werte für die Gerade natürlicherweise stark fehlerbehaftet. Es ergibt sich:

$$a(U) = (0,185 \pm 4,658) \frac{10^{-3}}{V \text{ sec}} \cdot U + (86,0827 \pm 7,96) \frac{1}{\text{sec}}.$$

Nach der gleichen Methode wie vorhin beschrieben erhalten wir hieraus die Steigung in % pro 100V. Das Ergebnis:

$$\text{Plateau-Anstieg} = (0,022 \pm 0,544)\% \text{ pro } 100V.$$

Trotz des großen Fehlers dieser Steigung ist deutlich erkennbar, wie flach das Plateau geworden ist. Wir sehen nun, daß der Name Plateau nicht nur ein Name ist. Das Zählrohr erfüllt unsere Erwartungen voll.

4.3 Gemessene Poissonverteilung

Nun kommen wir zu einem *sehr peinlichen* Teil des Versuchs. Wir haben schon in Abschnitt 3.3.1 angedeutet, welch dämlicher und unverzeihlicher Fehler uns in diesem Versuchsteil unterlaufen ist. Wir haben unsere Quelle so nah an den Zähler gestellt, daß dieser viel zu hohe Zählraten zählte: ungefähr 70 Zerfälle statt angemessener 20 davon in 1 sec. Wir werden noch im Detail erläutern, welche Probleme dadurch auftreten. Zunächst möchten wir aber nochmals betonen, wie sehr wir uns schämen, so blöd gewesen zu sein. Das können wir nicht anders sagen — wir ärgern uns ganz ehrlich sicher am meisten darüber — dennoch sagen wir an dieser Stelle: es ist passiert, schauen wir, was wir doch noch aus den Meßwerten herausholen können.

Das erste Problem ist die Totzeitkorrektur: Bei 20 Zerfällen pro Sekunde kann man sich eine Totzeitkorrektur sparen, denn wenn man diese totzeitkorrigieren würde, erhält man 21,5 Zerfälle pro Sekunde. Der Fehler, den man macht, wenn man die Meßwerte unkorrigiert benutzt, ist also in der Größenordnung des Fehler durch Hintergrundstrahlung, wirkt aber in umgekehrter Richtung (Hintergrundstrahlung: zu viele Zerfälle gemessen; Totzeit: zu wenige Zerfälle gemessen). Bei Zählraten von 70/sec ist dies anders: Die Totzeitkorrektur führt zu 93,1 Zerfällen pro Sekunde. Wenn wir also $\sigma = \sqrt{\mu}$ erwarten, so ist dies ohne Totzeitkorrektur nur ein frommer Wunsch.

Wir haben daher nun unsere Meßwerte totzeitkorrigiert. Dabei haben wir sie auf ganze Zahlen abgerundet. Aus diesen Werten berechnen wir zum einen den Mittelwert und die Varianz der Einzelmessung, zum anderen zählen wir, wie häufig die Zählraten auftreten, um eine Verteilung plotten zu können.

Es ergeben sich für Mittelwert und Varianz folgende Werte:

$$M = 85,6905 \text{ counts} \quad \text{und} \quad s = 9,77177 \text{ counts}.$$

Wir überprüfen $s = \sqrt{M}$: Es gilt $\sqrt{M} = 9,257$ counts. Die Übereinstimmung ist also ganz in Ordnung. Bei der Bestimmung der Häufigkeiten ergab sich folgende Tabelle und folgender Plot:

Zählrate	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Zählrate	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
62	1	0,0047619	88	0	0
63	0	0	89	10	0,047619
64	0	0	90	0	0
65	1	0,0047619	91	17	0,0809524
66	2	0,00952381	92	0	0
67	0	0	93	15	0,0714286
68	3	0,0142857	94	7	0,0333333
69	2	0,00952381	95	0	0
70	0	0	96	5	0,0238095
71	7	0,0333333	97	0	0
72	0	0	98	8	0,0380952
73	3	0,0142857	99	0	0
74	8	0,0380952	100	6	0,0285714
75	0	0	101	0	0
76	9	0,0428571	102	1	0,0047619
77	12	0,0571429	103	0	0
78	0	0	104	2	0,00952381
79	12	0,0571429	105	2	0,00952381
80	0	0	106	0	0
81	17	0,0809524	107	1	0,0047619
82	10	0,047619	108	0	0
83	0	0	109	3	0,0142857
84	13	0,0619048	110	0	0
85	0	0	111	1	0,0047619
86	14	0,0666667	112	0	0
87	16	0,0761905	113	2	0,00952381

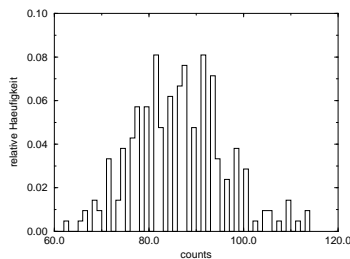


Abb. 4.3: Plot unserer Poisson-Messung

Leider läßt sich zu diesem Plot nicht allzu viel sagen. Denn daß z. B. recht viele Werte (z. B. 99 oder 101) gar nicht auftreten, liegt an unserer Totzeitkorrektur mit anschließendem Abrunden. Wir können nur feststellen, daß die Form unseres Plots ungefähr an eine Poissonverteilung erinnert. Mit einer theoretischen Poissonverteilung können wir nicht vergleichen; dies ist mal wieder eine Folge unseres dämlichen Fehlers. Denn wenn wir die theoretische Poissonverteilung berechnen wollten, müßten wir auch Werte wie $80!$ berechnen. Dies macht aber kaum ein Programm mit.

Aus diesem Grunde haben wir uns zu einem etwas ungewöhnlichen Schritt entschlossen: Wir haben die Auswertung von uns bekannten Kommilitonen zu Hilfe genommen und deren Meßwerte für die Poisson-Verteilung übernommen, um einen vernünftigen Plot und eine zugehörige theoretische Verteilung zu sehen. Unsere Mitstudenten haben aus ihren Meßwerten einen Mittelwert von

$$M = 15,235$$

berechnet. Die Häufigkeiten ihrer Messungen waren:

Zählrate	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Zählrate	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
7	1	0,005	17	27	0,135
8	5	0,025	18	14	0,07
9	2	0,01	19	17	0,085
10	12	0,06	20	7	0,035
11	14	0,07	21	8	0,04
12	15	0,075	22	1	0,005
13	12	0,06	23	1	0,005
14	22	0,11	24	1	0,005
15	22	0,11	25	1	0,005
16	17	0,085	26	1	0,005

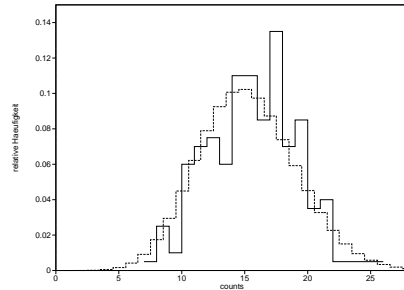


Abb. 4.4: Plot der Poisson-Messung unserer Kommilitonen

In diesem Plot ist die gemessene Verteilung unserer Kommilitonen gezeichnet. Gestrichelt ist zum Vergleich die theoretische Kurve mit obigem M geplottet. Außer dem sehr großen Ausreißer bei 17 Zerfällen und den kleineren bei 13 und 19 Zerfällen passen die Kurven recht gut zusammen. So ungefähr hätte es auch bei uns aussehen können und sollen. . .

4.4 Gemessene Normalverteilung

Bei dieser Messung müssen wir wieder totzeitkorrigieren (ist ja klar, wir haben das gleiche Präparat wie eben. . . und daher auch die gleiche Zählrate). Wir berechnen Mittelwert und Varianz der Einzelwerte aus den unkorrigierten und aus den korrigierten Werten (dann können wir uns von der Notwendigkeit der Totzeitkorrektur auch in der Praxis überzeugen). Wir erhalten:

Ohne Totzeitkorrektur:

$$M = 1981,8 \text{ counts} \quad \text{und} \quad s = 36,331 \text{ counts} .$$

Die Gleichung $s = \sqrt{M}$ ist nicht erfüllt, denn $s^2 = 1320$. Wie erwartet ist die nicht-korrigierte Verteilung zu schmal.

Mit Totzeitkorrektur:

$$M = 2588,8 \text{ counts} \quad \text{und} \quad s = 62,0503 \text{ counts} .$$

Nun, das überzeugt nicht gerade von der Totzeitkorrektur: $s^2 = 3850$. Diese Verteilung ist nun zu breit. Eigentlich sollte s bei ungefähr 50 liegen. Wir werden uns bei den Stichproben à 20 Meßwerten das nochmal genauer anschauen und diskutieren.

Als nächstes bestimmen wir wieder die Häufigkeiten der Zählraten, um eine Verteilung plotten zu können. Da durch die Totzeitkorrektur mit anschließendem Abrunden wieder der Fall eintritt, daß bestimmte Zählraten scheinbar nicht auftreten, berechnen wir die Häufigkeit von Intervallen der Länge Zehn. Dies glättet unsere systematischen Umrechnungsfehler.

Um diese Häufigkeiten mit der theoretischen Verteilung vergleichen zu können, müssen wir natürlich die relativen *Einzelhäufigkeiten* plotten, da die theoretische Verteilung ja eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist (Antwort auf die „Physikerfrage“). Wir plotten also im Abstand von 10 Counts, jeweils in der Mitte

des Intervalls, die relativen Einzelhäufigkeiten, die in der folgenden Tabelle aufgeführt sind. Zusätzlich plotten wir die theoretische Verteilung mit dem obigen Mittelwert und der obigen Streuung.

Intervall	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Summe der rel. Häufigkeiten	relative Einzel-Häufigkeiten
2420-2429	1	0,0025	0,0025	0,00025
2430-2439	1	0,0025	0,005	0,00025
2440-2449	1	0,0025	0,0075	0,00025
2450-2459	2	0,005	0,0125	0,0005
2460-2469	2	0,005	0,0175	0,0005
2470-2479	6	0,015	0,0325	0,0015
2480-2489	5	0,0125	0,045	0,00125
2490-2499	8	0,02	0,065	0,002
2500-2509	11	0,0275	0,0925	0,00275
2510-2519	14	0,035	0,1275	0,0035
2520-2529	22	0,055	0,1825	0,0055
2530-2539	16	0,04	0,2225	0,004
2540-2549	22	0,055	0,2775	0,0055
2550-2559	24	0,06	0,3375	0,006
2560-2569	26	0,065	0,4025	0,0065
2570-2579	22	0,055	0,4575	0,0055
2580-2589	25	0,0625	0,52	0,00625
2590-2599	24	0,06	0,58	0,006
2600-2609	19	0,0475	0,6275	0,00475
2610-2619	16	0,04	0,6675	0,004
2620-2629	26	0,065	0,7325	0,0065
2630-2639	23	0,0575	0,79	0,00575
2640-2649	26	0,065	0,855	0,0065
2650-2659	11	0,0275	0,8825	0,00275
2660-2669	10	0,025	0,9075	0,0025
2670-2679	9	0,0225	0,93	0,00225
2680-2689	3	0,0075	0,9375	0,00075
2690-2699	7	0,0175	0,955	0,00175
2700-2709	3	0,0075	0,9625	0,00075
2710-2719	2	0,005	0,9675	0,0005
2720-2729	4	0,01	0,9775	0,001
2730-2739	1	0,0025	0,98	0,00025
2740-2749	6	0,015	0,995	0,0015
2750-2759	2	0,005	1	0,0005

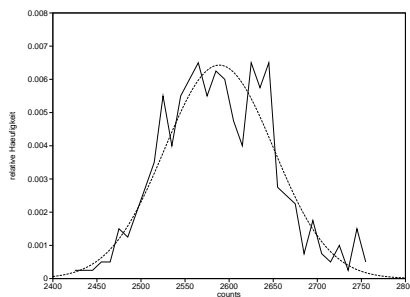


Abb. 4.5: Unser Gauß-Plot

Die Kurven stimmen im wesentlichen überein. Im Bereich 2600 bis 2650 counts gibt es allerdings ein paar Unregelmäßigkeiten, die offensichtlich für unsere zu große Streuung verantwortlich sind.

Neben all diesen Rechnungen und Plots sollten wir die Verteilungsfunktion unserer Meßwerte auf sogenanntes *Wahrscheinlichkeitspapier* auftragen. Diese Zeichnung liegt der Auswertung bei. Auf Wahrscheinlichkeitspapier ist die Ordinatenskala so verzerrt, daß die Verteilungsfunktion einer Gaußverteilung als Gerade erscheint. Der Mittelwert μ ist die Abzisse des Schnittpunkts der Geraden mit der 50%-Linie. Da die Fläche von $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$ unter der Gauß-Verteilung 68% beträgt, ist die Abzisse des Schnittpunkts der

Geraden mit der 16%-Linie ($50\% - \frac{68}{2}\%$) der Wert $\mu - \sigma$. Analog ist der Wert $\mu + \sigma$ die Abzisse des Schnittpunkts der Geraden mit der 84%-Linie.

Wie tragen wir die Verteilungsfunktion auf? Da wir nur ganze Zerfälle zählen, können wir die Integration der Verteilung durch Summenbildung der Häufigkeiten ersetzen. Diese Summen sind in der letzten Tabelle mit aufgeführt. Unsere Auftragung ergab: $\mu = 2594$. Für die Streuung erhielten wir: $\sigma = \begin{matrix} +62 \\ -60 \end{matrix}$.

Natürlich liegen die Werte nicht ideal auf einer Geraden (das ist nach dem Gauß-Plot ja auch nicht zu erwarten). Die entscheidende Gerade haben wir graphisch angepaßt. Insofern ist es klar, daß die Ergebnisse von den errechneten ein wenig abweichen; aber natürlich ist die Abweichung nicht zu groß, schließlich stammt beides aus den gleichen Meßwerten.

4.5 Empirische Mittelwerte und Varianzen im Beispiel

Aus den 400 Meßwerten zur Gauß-Verteilung wurden 20 Stichproben à 20 Meßwerten gebildet. Die ersten 20 Meßwerte wurden zur ersten Stichprobe, die nächsten 20 Meßwerte zur zweiten, usw. Zu jeder Stichprobe bestimmten wir nun den Mittelwert und die Streuung. Es ergab sich folgende Tabelle:

Nr.	Mittelwert M	Streuung s	Nr.	Mittelwert M	Streuung s
1	2600,15	56,71	11	2601,45	65,7231
2	2583	60,5084	12	2575	75,1343
3	2573,25	66,5913	13	2584,9	48,9144
4	2584,85	69,4492	14	2566,75	67,6538
5	2605	70,2477	15	2599,95	64,2859
6	2575,6	55,1423	16	2589,7	47,8936
7	2585,45	53,7758	17	2611,1	56,0422
8	2609,8	77,4009	18	2583,9	52,6467
9	2584,25	41,3112	19	2594,55	71,7074
10	2583,95	70,3476	20	2583,3	61,0186

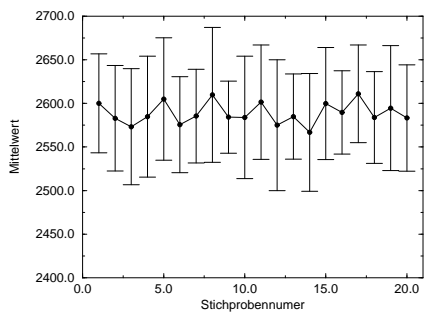
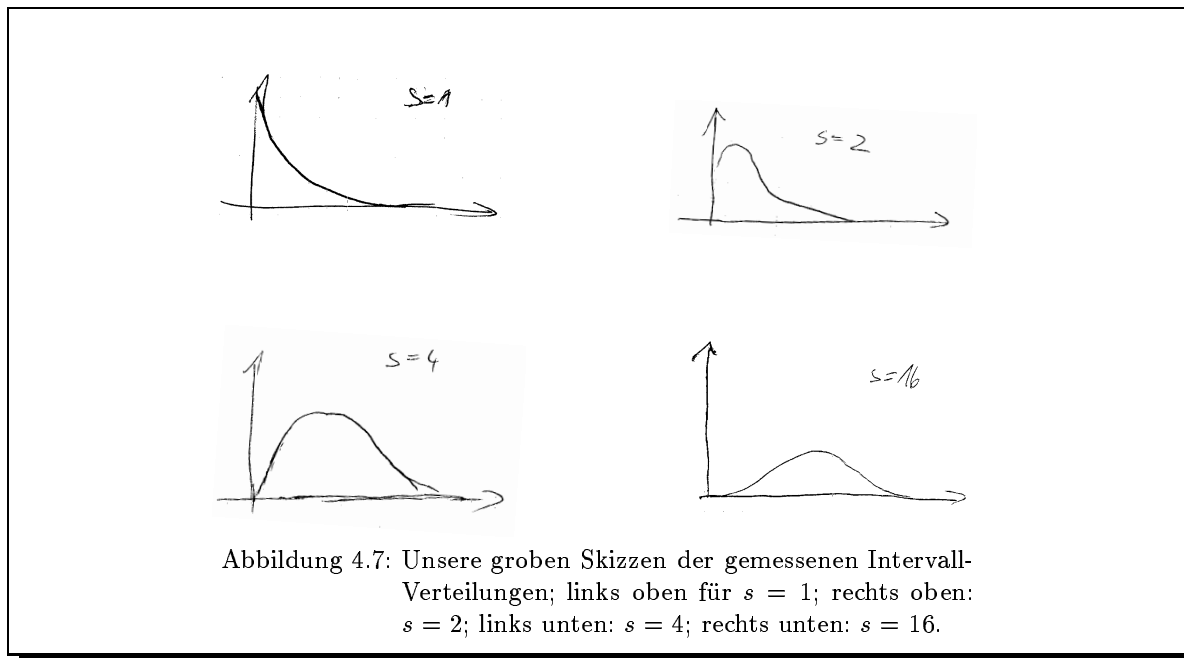


Abb. 4.6: Mittelwerte der Stichproben

Wir wollen uns auch nochmal einen graphischen Überblick verschaffen und haben die Mittelwerte mit ihren Streuungen in Abhängigkeit der Stichprobennummer, also auch der Versuchszeit von 4 Stunden, geplottet. Man erkennt, daß es einige Stichproben gibt — z. B. Nr. 6, 7, 9, 13, 16 und 18 — deren Streuungsquadrat wie erwartet ungefähr gleich dem Mittelwert ist. Hingegen haben andere Stichproben — z. B. Nr. 5, 8, 10, 12 — sehr große Streuungen, bei verhältnismäßig großen oder kleinen Mittelwerten. Dies war uns ja schon beim Gauß-Plot aufgefallen. Innerhalb von unterschiedlichen Viertelstunden sind also besonders häufig oder selten Zerfälle aufgetreten. Nun, das ist Statistik, nur sollten noch häufiger auch niedrigere Streuungen auftreten. Wir wissen eigentlich nicht, warum unsere Meßwerte tendenziell zu stark streuen. Unsere einzige Vermutung ist die einer schwankenden Höhenstrahlung (z. B. besondere Sonnenaktivität...), was wir nur über unsere Messung von 289 counts alleine aus der Hintergrundstrahlung stützen können. Dies bietet genug Spielraum für unregelmäßige Schwankungen, die unserer konstanten Zerfallskonstante des Präparats einen Strich durch die Rechnung machen können.

Die Mittelwerte und Streuungen der Poissonverteilung und der Gaußverteilung haben wir an den entsprechenden Stellen berechnet. Die Theorie zu den verschiedenen Streuungsbegriffen im Experiment



haben wir in Abschnitt 1.4 auf Seite 11 ausführlich diskutiert. Uns bleibt an dieser Stelle, die Streuung der Mittelwerte der Poissonverteilung und der Gaußverteilung zu berechnen:

Aus der Streuung der Poissonverteilung $s = 9,77177$ erhalten wir bei 210 Messungen einen Mittelwert mit Streuung von:

$$M = 85,6905 \pm 0,6743 .$$

Für die Gaußverteilung ohne Totzeitkorrektur ergibt sich ($s = 36,331, 400$ Messungen):

$$M = 1981,8 \pm 1,82 .$$

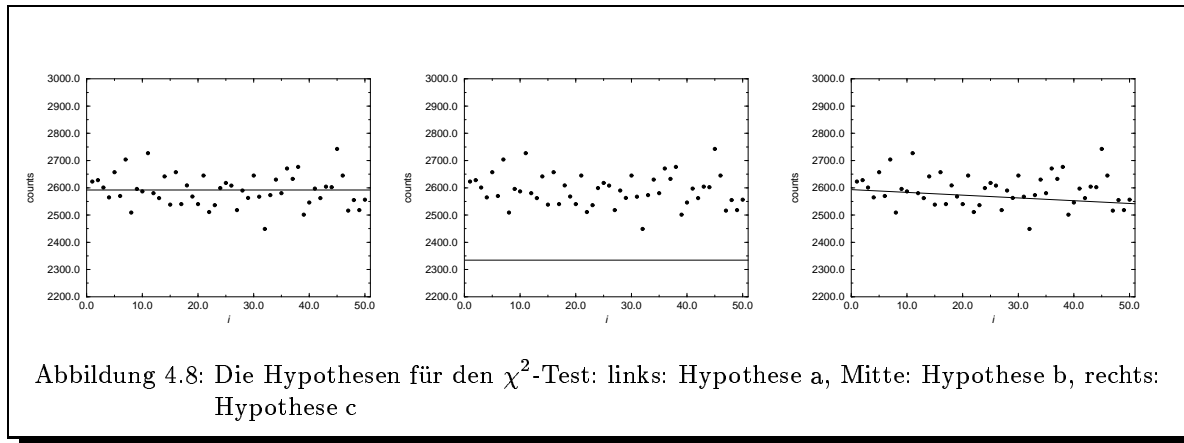
Und für die Gaußverteilung mit Totzeitkorrektur erhalten wir ($s = 62,0503, 400$ Messungen):

$$M = 2588,8 \pm 3,1 .$$

4.6 Intervallverteilung

Nachdem wir die Theorie der Intervallverteilung schon auf Seite 15 in Abschnitt 1.6.1 und den Versuchsaufbau zur Messung derselbigen auf Seite 29 beschrieben haben, bleibt uns hier nur noch, das Ergebnis zu präsentieren. Da unser VKA diesmal kein PC mit dem Programm nucleus war, sondern ein älteres eigenständiges Modell, konnten wir keine Daten mit nach Hause nehmen. Als einziges skizzierten wir beim Versuch grob den ungefähren Verlauf der Verteilung. Diese Skizzen scannten wir ein und man kann sie in Abbildung 4.7 „bewundern“.

Dafür, daß unsere Skizzen nicht gerade als Vorbild für exakte Zeichnungen dienen können, sind sie doch eigentlich recht gut. Wenn man die Scans aus Abb. 4.7 nämlich mit den exakten theoretischen Verteilungen aus Abbildung 1.5 vergleicht, so erkennt man doch eine erstaunlich gute Übereinstimmung. Alle wesentlichen Merkmale der Intervallverteilungen sind qualitativ auch auf unseren Scans zu erkennen. Wir denken, daß wir den Versuchsteil als gelungen einstufen können.



4.7 Der Chi-Quadrat-Test in Aktion

Um einige Hypothesen mit dem χ^2 -Test zu testen, benutzen wir die ersten 50 Messungen der Gaußverteilung. Wir nehmen an, daß die Werte im gleichen zeitlichen Abstand aufgenommen wurden, was für die Interpretation der dritten Hypothese von Bedeutung ist. Wir wollen im folgenden probeweise den χ^2 -Test auf Werte, die nicht totzeit-korrigiert sind, anwenden; dabei müssen wir natürlich explizit σ^2 in unserem Maß (1.6) verwenden, da diese Werte nicht aus einer Poisson-Verteilung stammen. Desweiteren wollen wir dann den χ^2 -Test auf die totzeitkorrigierten Werte loslassen; wir werden hier σ^2 durch die Hypothesen-Erwartungswerte f_i ersetzen, weil die totzeitkorrigierten Werte poissonverteilt sein sollten.

Zunächst berechnen wir die Mittelwerte und die Streuungen der Einzelmessung aus den 50 Meßwerten. Es ergibt sich:

$$M_{\text{ohne}} = 1983,26 \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{ohne}} = 34,9325$$

und

$$M_{\text{mit}} = 2591,22 \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{mit}} = 59,6388.$$

Die Hypothesen

Die Hypothesen führen jeweils auf eine vermutete Verteilung $f(i)$ der Meßwerte mit $i = 1, \dots, 50$, was der fortschreitenden Zeit entspricht. Wir formulieren nun die Hypothesen nochmal in Worten, geben die f_i für die beiden zu betrachtenden Fälle an, und plotten die Hypothesen beispielhaft für den totzeitkorrigierten Fall in Abbildung 4.8:

Hypothese a: Die Präparatstärke ist konstant gleich dem Mittelwert der Meßwerte.

$$f_{\text{ohne}}(i) \equiv 1983,26, \quad f_{\text{mit}}(i) \equiv 2591,22.$$

Hypothese b: Die Präparatstärke ist konstant gleich dem Mittelwert der Meßwerte minus 10%.

$$f_{\text{ohne}}(i) \equiv 1784,934, \quad f_{\text{mit}}(i) \equiv 2332,1.$$

Hypothese c: Die Präparatstärke fängt bei einer Zählrate gleich dem Mittelwert an und fällt dann pro Messung um 1.

$$f_{\text{ohne}}(i) = 1983,26 - (i - 1), \quad f_{\text{mit}}(i) = 2591,22 - (i - 1).$$

Der Test

Wir berechnen nun die beiden Maße. Unser plausibles Maß (1.6) sieht für den Fall ohne Totzeitkorrektur wie folgt aus:

$$\chi_{\text{ohne}}^2 = \sum_{i=1}^{50} \frac{(N_i^* - f_{\text{ohne}}(i))^2}{\sigma_{\text{ohne}}^2}.$$

Und für den totzeitkorrigierten Fall nehmen wir wie angekündigt folgendes Maß:

$$\chi_{\text{mit}}^2 = \sum_{i=1}^{50} \frac{(N_i - f_{\text{mit}}(i))^2}{f_{\text{mit}}(i)}.$$

Wir berechneten folgende Maße:

	χ_{ohne}^2	χ_{mit}^2
Hypothese a	49,0	67,26
Hypothese b	1660,65	1514,28
Hypothese c	76,87	79,51

Zur Interpretation dieser Werte legen wir zunächst eine *Irrtumswahrscheinlichkeit* oder *Signifikanzzahl* α fest. Wenn das χ^2 dann außerhalb unserer Erwartung fällt, verwerfen wir die Hypothese und die Wahrscheinlichkeit, daß wir die Hypothese fälschlicherweise verworfen haben, ist α . Wir wählen $\alpha = 5\%$. Wie bestimmen wir nun „unsere Erwartung“? Zunächst bestimmen wir den Freiheitsgrad. Bei den totzeitkorrigierten Werten haben wir 50 unabhängige Meßwerte und einen abhängigen Wert, denn die Hypothesen sind ja aus den Meßwerten bestimmt, also Freiheitsgrad 49. Bei den Werten, die unkorrigiert blieben, verwendeten wir noch eine zweite abhängige Größe, die Varianz σ_{ohne}^2 , also haben wir hier Freiheitsgrad 48. Wir schauen nun in der Tabelle unter der Spalte $\chi_{1-\alpha}^2$ und der Zeile mit dem entsprechenden Freiheitsgrad nach. Der Wert c , der dort steht, gibt nun an, daß das Integral der χ^2 -Verteilung über das Intervall $[0, c]$ gerade $1 - \alpha$ beträgt (das Integral über $[0, \infty[$ ist ja 1). Mit Wahrscheinlichkeit α liegt also unser χ^2 oberhalb von c und dann verwerfen wir die Hypothese. Apropos „entsprechender Freiheitsgrad“: Der „Appendix“ unserer Anleitung enthält zwar alle Freiheitsgrade bis 29, dann aber sind die Freiheitsgrade nur noch in Zehnerschritten verzeichnet. Auch im **Bronstein-Semendjajew** und im [Kr] finden sich keine besseren Tabellen. Für einige wenige Signifikanzzahlen sind im [Wae] alle Freiheitsgrade bis 100 tabelliert. Wir werden also diese Zahlen verwenden, soweit verfügbar, ansonsten (beim zweiseitigen Test) werden wir zwangsläufig die Werte für Freiheitsgrad 50 benutzen müssen. Schön, daß brauchbare Tabellen so leicht zu finden sind :-)

Einseitiger Test: Es ist $\chi_{0,95}^2 = 65,2$ für Freiheitsgrad 48 und $\chi_{0,95}^2 = 66,3$ für Freiheitsgrad 49. Wir sehen also, daß Hypothese b in beiden Fällen riesig weit neben dem Mittelwert der Verteilung liegt. Die Hypothese ist klar zu verwerfen. Das ist wenig überraschend, wir konnten das ja schon am Plot 4.8 ablesen und außerdem war es uns theoretisch schon lange klar. Aber auch die Maße von Hypothese c sind größer als unser tabellierter χ^2 -Wert und damit mit Irrtumswahrscheinlichkeit 5% zu verwerfen. Und wie sieht Hypothese a aus? Im unkorrigierten Fall mit dem σ^2 aus den Meßwerten liegt unser Maß wunderprächtigt (Mittelwert der Verteilung bei 48, unser Maß 49). Es gibt keinen Grund, in irgendeiner Form an der Hypothese zu zweifeln. Im korrigierten Fall, ist unser Maß gerade über dem tabellierten Wert. Wir müßten die Hypothese gerade verwerfen. Das ist kein so schönes Ergebnis, aber wir haben für die totzeitkorrigierten Meßwerte ja eine Poissonverteilung angenommen. Wir hatten bereits früher gesehen, daß unsere Meßwerte diese ideale Vorstellung nicht so gut erfüllen. Daher ist dieses zu große Maß zumindest verständlich.

Zweiseitiger Test: Bisher haben wir mit unserem Integral über $[0, c]$ nur die Seite abgedeckt, wo unser Maß zu groß geworden ist. Ebenso schlecht ist es, wenn unser Maß zu klein ist; es weicht dann

ja ebenso stark vom Mittelwert der χ^2 -Verteilung ab. Wir können nun also zwei Werte c_1 und c_2 bestimmen, so daß die Fläche unter der Verteilung über dem Intervall $[0, c_1]$ gerade $\frac{\alpha}{2}$ ist, über dem Intervall $[c_1, c_2]$ den Wert $1 - \alpha$ annimmt und dann natürlich über $[c_2, \infty[$ wieder $\frac{\alpha}{2}$ beträgt. Wenn unser Maß dann außerhalb von $[c_1, c_2]$ liegt, können wir die Hypothese wieder mit Irrtumswahrscheinlichkeit α verwerfen. Wegen unserer Wahl $\alpha = 5\%$ lesen wir aus den Spalten $\chi_{0,025}^2$ und $\chi_{0,975}^2$ die Werte für c_1 bzw. c_2 ab, leider nur für den Freiheitsgrad 50: $c_1 = 32,4$ und $c_2 = 71,4$. Mit diesen Werten ändern sich die Aussagen für die Hypothesen b und c nicht. Bei b war das auch kaum zu erwarten; daß dies auch bei c klappt, ist erfreulich. Das unkorrigierte Maß für Hypothese a liegt selbstverständlich immer noch ideal. Das korrigierte Maß derselben Hypothese würden wir (im Gegensatz zum einseitigen Test) beim zweiseitigen Test nicht verwerfen können. Das ist zwar schonmal recht gut, dennoch — wie gesagt — liegt dieser Wert nicht allzu überzeugend.

Halbwertszeit nach Hypothese c

Wir nehmen nun speziell an, daß die einzelnen Messungen im zeitlichen Abstand von drei Minuten erfolgt sind; die erste Messung zum Zeitpunkt 0. Wir rechnen das folgende nur für den totzeitkorrigierten Fall durch. Die Verteilung von Hypothese c nimmt dann mit $f(0) = 2591,22$ und $f(\frac{t}{180 \text{ sec}} + 1) = f(i)$ folgende Form an:

$$f(t) = f(0) - \frac{t}{180 \text{ sec}} = f(0) \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{1}{f(0) \cdot 180 \text{ sec}}}_{=: \alpha} \cdot t\right).$$

Dies können wir als erste Näherung des theoretischen exponentiellen Zerfalls

$$f(t) = f(0) \cdot e^{-\alpha t}$$

auffassen. Für die Halbwertszeit dieses Zerfalls, der Zeit also, in der die Hälfte der Kerne zerfallen sind, gilt somit mit dem α aus unserer Näherung:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\alpha} = f(0) \cdot 180 \text{ sec} \cdot \ln 2.$$

Mit unserem $f(0)$ eingesetzt erhalten wir somit eine Halbwertszeit

$$t_{\frac{1}{2}} = 323\,297,43 \text{ sec} = 89,8 \text{ h}.$$

Unser Präparat hat natürlich eine viel größere Halbwertszeit und unsere Messungen lagen auch nur höchstens eine Minute auseinander, aber wir wollten an diesem Beispiel ja nur das Prinzip erkennen, nachdem man bei geeigneten Kernen die Halbwertszeit bestimmen kann.

Literaturverzeichnis

Im folgenden wollen wir auf die Versuchsprotokolle der anderen Experimente im Fortgeschrittenenpraktikum, die von uns durchgeführt wurden und das vorliegende Protokoll hinsichtlich der theoretischen Grundlagen ergänzen, verweisen. Außerdem stellen wir eine Liste der Literatur auf, die wir am stärksten (nicht als einzige) zur Vorbereitung und Auswertung nutzten.

- [CHI] U. Münch: *Die χ^2 -Verteilung und der χ^2 -Test*, Seminarvortrag im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Ausarbeitung. Köln, 1994
- [Wae] B. L. van der Waerden: *Mathematische Statistik*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1957
- [Kr] E. Kreyszig: *Statistische Methoden und ihre Anwendungen*. 3. Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1968
- [Bev] P. R. Bevington: *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. New York: McGraw Hill, 1969
- [FP-7] O. Flimm, U. Münch: *γ - γ -Koinzidenz*, Versuch 7 im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [FP-8c] O. Flimm, U. Münch: *Digitale Elektronik*, Versuch 8c im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [Sem-1] Elke Goldschmidtböing: *σ -Algebren, meßbare Mengen und Funktionen*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1992
- [Sem-2] Jutta Gromes: *Fortsetzung von [Sem-1]*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1992
- [Sem-6] Kai Lübke: *Der Dualraum der stetigen Funktionen*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1992
- [Sem-10] Ursula Radermacher: *Fourier-Reihen stetiger Funktionen*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1992
- [Sem-12] Alexandra Vatter: *Fourier-Transformation, Fourier-Umkehr und der Satz von Plancherel*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1993
- [Sem-14] Uwe Münch: *Anwendung der Fouriertransformation auf die Lösung partieller Differentialgleichungen*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1993
- [Za] A. C. Zaanen: *Continuity, Integration and Fourier Theory*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1989
- [Ana] H. Reckziegel: *Definitionen, Formeln, Sätze zu den Vorlesungen Analysis I-III*. Vorlesungsskript. Köln, 1990-1992
- [FN] E. Fünfer, H. Neuert: *Zählrohre und Szintillationszähler*. 2. Auflage. Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1959

Index

- M , 11
- α_n , 5
- χ^2 -verteilt, 14
- $\mathcal{P}(\cdot)$, 1
- $\mathcal{B}(E, \mathcal{P})$, 2
- μ , 5
- σ^2 , 5
- s^2 , 12

- Arbeitsbereiche
 - des Zählrohrs, 20
- arithmetisches Mittel, 11
- asymptotisch normal verteilt, 12
- Auslösebereich, 23

- Bernoulli-Experiment, 6
- Bernoulli-Verteilung, *siehe* Binomialverteilung
- Binomialverteilung, 6, 7
 - Mittelwert, 7
 - Schiefe, 7
 - Varianz, 7

- Charakteristik des Zählrohrs, 23
- charakteristische Funktion, 3
 - der Binomial-Verteilung, 6
 - der χ^2 -Verteilung, 14
 - der Gaußverteilung, 9
 - der Normalverteilung, 9
 - der Poisson-Verteilung, 8
- Chi-Quadrat-Test, 14, 39
- Chi-Quadrat-Verteilung, 14
 - Mittelwert, 14
 - Schiefe, 14
 - Summe von, 14
 - Varianz, 14

- Dauerentladung, 23
- DeMoivre Laplace, 11
- diskrete Verteilung, 2

- eingeschränkter Proportionalbereich, 22
- Elektronenlawine, 22
- Elementarereignis, 1
- empirisch
 - Mittelwert, 11, 37
 - Streuung, 12, 37
 - Varianz, 12, 37

- Ereignis, 1
 - Elementar-, 1
- Erholzeit, 23
 - Messung, 26
- erwartungstreu, 11
- Erwartungswert, 3
- Experiment
 - Bernoulli-, 6
 - Mittelwert im, 11
 - Varianz im, 11

- Faltung, 4
- Fehlertheorie
 - Gauß'sche, 13
- Fläche
 - unter der Gaußverteilung, 10
 - unter der Normalverteilung, 10
- Freiheitsgrad
 - einer χ^2 -Verteilung, 14
- Funktion
 - charakteristische, *siehe* charakteristische...
meßbare, 2

- Gauß'sche Fehlertheorie, 13
- Gaußverteilung, 9
 - Auswertung, 35
 - Fläche unter, 10
 - Höhe der, 10
 - Messung, 28
 - Mittelwert, 9
 - Schiefe, 9
 - standardisierte, 10
 - Summe von, 10
 - Varianz, 9
 - Wendepunkte, 10
- Geiger-Müller, 23
- Grenzwertsatz
 - zentraler, 12
- Größe
 - zufällige, 2

- Halbwertszeit, 41
- Höhe
 - der Gaußverteilung, 10
 - der Normalverteilung, 10

Hypothese, 14
 Intervallverteilung, 15, 16, 29, 38
 Schaltung zur Messung, 29
 Ionisation
 Primär-, 19
 Sekundär-, 19
 Ionisationskammer, 20
 Irrtumswahrscheinlichkeit, 14, 40

 Kernzerfall, 15
 konsistent, 12
 kontinuierliche Verteilung, 2

 Laplace, *siehe* DeMoivre Laplace
 Lawineneffekt, 22
 Löschen, 24

 Maß \mathcal{P} , 2
 Maßzahl, *siehe* Moment
 im Experiment, 11
 Menge
 meßbare, 2
 meßbare Funktionen, 2
 meßbare Mengen, 2
 Mittel
 arithmetisches, 11
 Mittelwert, 5
 der χ^2 -Verteilung, 14
 der Binomialverteilung, 7
 der Gaußverteilung, 9
 der Normalverteilung, 9
 der Poisson-Verteilung, 8
 empirischer, 11, 37
 im Experiment, 11
 mittlere Zerfallszeit, 17
 Moivre, *siehe* DeMoivre Laplace
 Moment, 5
 in bezug auf einen Punkt, 5
 Müller, *siehe* Geiger-Müller

 n -tes Moment, *siehe* Moment
 Näherungsformel
 von DeMoivreLaplace, 11
 nicht-selbstlöschendes Zählrohr, 24
 Normalverteilung, 9
 Auswertung, 35
 Fläche unter, 10
 Höhe der, 10
 Messung, 28
 Mittelwert, 9
 Schiefe, 9
 standardisierte, 10
 Summe von, 10
 Varianz, 9
 Wendepunkte, 10

 Normierung, 3

 Oszilloskopmethode, 17, 26, 30

 Physikerfrage, 2
 Plateau des Zählrohrs, 23
 Auswertung, 32
 Messung, 26
 Poisson-Verteilung, 8, 9
 Auswertung, 33
 Messung, 27
 Mittelwert, 8
 Schiefe, 8
 Summe von, 8
 Varianz, 8
 Primärionisation, 19
 Proportionalbereich, 22
 eingeschränkter, 22

 Rekombination, 20

 Sättigungsbereich, 20
 Schätzung, 11
 Schiefe, 6
 der χ^2 -Verteilung, 14
 der Binomialverteilung, 7
 der Gaußverteilung, 9
 der Normalverteilung, 9
 der Poisson-Verteilung, 8
 Sekundärionisation, 19
 selbstlöschendes Zählrohr, 24, 25
 Signifikanzzahl, 40
 standardisierte Gaußverteilung, 10
 standardisierte Normalverteilung, 10
 Stichprobe, 11
 Stieltjes-Integral, 2
 Streuung, 5
 Addition von \sim en, 6
 empirische, 12, 37
 Summe
 einer Verteilungsfunktion, 4
 χ^2 -verteilter Größen, 14
 gaußverteilter Größen, 10
 normalverteilter Größen, 10
 poissonverteilter Größen, 8
 von Streuungen, 6

 TAC, 29
 Time to amplitude converter, 29
 Totzeit, 15, 16, 23
 Korrektur der, 17
 Messung, 26
 Oszilloskopmethode, 17, 26, 30
 Zwei-Präparate-Methode, 18, 26, 31
 Tschebyscheff'sche Ungleichung, 11

- Ungleichung
 - Tschebyscheff'sche, 11
- Varianz, 5
 - der χ^2 -Verteilung, 14
 - der Binomialverteilung, 7
 - der Gaußverteilung, 9
 - der Normalverteilung, 9
 - der Poisson-Verteilung, 8
 - empirische, 12, 37
 - im Experiment, 11
- Verteilung, 2
 - Binomial-, 6, 7
 - Chi-Quadrat-, 14
 - diskrete, 2
 - Gauß-, 9, 28, 35
 - Intervall-, 15, 16, 29, 38
 - kontinuierliche, 2
 - Normal-, 9, 28, 35
 - Poisson-, 8, 9, 27, 33
- Verteilungsfunktion, 2
 - einer Summe, 4
- Wahrscheinlichkeitsdichte, 2
- Wahrscheinlichkeitspapier, 36
- Wendepunkt
 - der Gaußverteilung, 10
 - der Normalverteilung, 10
- Zählbereich, 23
- Zählrate, 15
- Zählrohr, 19
 - Arbeitsbereiche, 20
 - Charakteristik, 23
 - nicht-selbstlöschendes, 24
 - Plateau, 23, 26, 32
 - selbstlöschendes, 24, 25
- Zählrohrmantel, 19
- zentraler Grenzwertsatz, 12
- Zerfallskonstante, 15
- Zerfallszeit
 - mittlere, 17
- zufällige Größe, 2
- Zwei-Präparate-Methode, 18, 26, 31