

Betreuer: I. Wiedenhöver

Fortgeschrittenen-Praktikum am
Institut für Kernphysik

Gamma-Szintillation¹

Oliver Flimm
Oberstraße 74
51149 Köln

Uwe Münch
Schmittgasse 92
51143 Köln

Wintersemester 93/94²

e-mail: flimm@ph-cip.uni-koeln.de
muench@ph-cip.uni-koeln.de

¹Versuch 5

²Durchführung des Versuchs: 18.10.93

Vorwort

Wir wollen hier zunächst ein paar Worte zum Aufbau unseres Versuchsprotokolls verlieren. Denn auf den nächsten Seiten zierte ein „© by Oliver Flimm und Uwe Münch“ die letzte Zeile. Warum dies? Sind diese beiden Praktikanten so eingebildet oder übergeschnappt? Nein, das sind wir nicht, und wir wollen jetzt also begründen, warum wir diese Zeile am Ende jeder Seite für nötig halten.

Viele Praktikanten bereiten ihre Versuche im CIPLAB vor und werten sie auch dort aus. Nur einige davon schützen ihre Arbeit vor Zugriff durch andere. Das bedeutet, daß man sich vielfach die .dvi-Dateien anschauen kann, aber auch daß man direkt auf .tex-Sourcen zugreifen könnte. Dieser Zustand ist ja allgemein bekannt. Wie ist nun unsere Einstellung dazu?

Wir denken, daß es nicht Sinn der Sache (d. h. des FP's) sein kann, sich einfach die Sourcen zu kopieren. Zumeist sind diese Vorlagen auch lückenhaft oder enthalten Fehler. Kurz gesagt, aus diesen Gründen benutzten wir keine solchen Textvorlagen. (Über unser Verfahren, was Bilder angeht, werden wir uns gleich äußern.) Wie sieht das nun mit .dvi-Files aus? Wir denken, daß ein Aspekt des Fortgeschrittenpraktikums ist, daß wir lernen, wie man durchgeführte Versuche protokolliert, beschreibt und (später mal) veröffentlicht. Zu diesem Lernprozeß gehört es sicherlich auch, anhand von Beispielen zu sehen, wie so etwas geschieht. (Allerdings bezweifeln wir, daß dazu die Vorlagen immer so geeignet sind.) Zumindest halten wir es für keinen Frevel, wenn man sich anhand anderer Ausarbeitungen eine Idee holt, wie Versuchsprotokolle anzufertigen sind. Daher beabsichtigen auch wir, unsere .dvi-Dateien im CIPLAB allgemein lesbar zur Verfügung zu stellen. Dies wird *nicht* mit unseren .tex-Sourcen geschehen! Diese halten wir natürlich geschützt. Wir wollen nämlich nicht, daß unsere Mühen *einfach so* von anderen, uns bekannten oder unbekanntem Studenten weiter genutzt werden. Wie oben dargelegt, haben wir aber nichts dagegen, wenn unsere Ausarbeitung als Beispiel und Denkanstoß dient. Für Nachfragen, etc. haben wir unsere vollständigen Normal- und unsere e-mail-Adressen angegeben. Damit niemand auf die Idee kommt, sich das Leben doch zu einfach zu machen und die .dvi-Datei einfach ausdruckt und in der Hoffnung, daß sie keiner wiedererkennt, abgibt, haben wir die Copyright-Zeile eingefügt. Diese dürfte so etwas effektiv verhindern. Außerdem (wovon wir weniger überzeugt sind) dient sie vielleicht als psychologische Sperre, zu wörtlich von uns abzuschreiben.

Nachdem wir uns so ausführlich über diese Vorgehensweise ausgelassen haben, wollen wir dann auch noch ein paar Worte über Bildvorlagen verlieren. Bei manchen Versuchen benutzten wir aus Büchern eingescannte Graphiken. Wir haben dann jeweils die Herkunft vollständig (also am Bild und im Literaturverzeichnis) dokumentiert. Alle sonstigen Bilder sind von uns mittels xfig, gnuplot oder ähnlichen Programmen selbst erstellt worden.

Ein paar abschließende Worte zur benutzten \TeX -Umgebung: Wir erstellten unsere Ausarbeitungen bereits mit der Testversion des neuen Formats $\LaTeX 2\epsilon$. Die benutzten Classes und Packages sind allerdings noch von Hand von uns angepaßt worden. Aber nun in medias res...

Inhaltsverzeichnis

1. Aussendung von γ-Strahlung durch Kerne	1
1.1 Was ist γ -Strahlung, welche Strahlungen gibt es noch?	1
1.2 Übergänge zwischen Kernzuständen	2
1.2.1 Grundzustand und angeregte Kernzustände	2
1.2.2 Charakterisierende Größen der Kerne und Auswahlregeln	3
1.2.3 Auswirkungen der Auswahlregeln	6
2. Wechselwirkung von γ-Strahlung mit Materie	8
2.1 Der Photoeffekt	9
2.2 Der Comptoneffekt	10
2.3 Die Paarbildung	14
2.4 Absorptionsverhalten von γ -Strahlung	15
3. Detektoren und Spektren	17
3.1 Der Szintillationszähler	17
3.2 Andere Detektoren und Elektronik	19
3.3 Das γ -Spektrum	20
4. Die Meßdaten	22
4.1 Impulsanstiegs- und -abfallzeiten	22
4.2 Verstärkung des SEV	22
4.3 Linearer Absorptionskoeffizient	23
5. Auswertung	25
5.1 Impulsanstiegs- und -abfallzeiten	25
5.2 Dynoden und Verstärkung des SEV	25
5.3 Eichungen	27
5.3.1 Eichung des Szintillationsspektrometers	27
5.3.2 Eichung des Halbleiterdetektors	29
5.4 Messungen mit dem Halbleiterdetektor	31
5.4.1 Kompliziertes Spektrum	31
5.4.2 Spektrum des Raumuntergrundes	33
5.5 Linearer Absorptionskoeffizient von Aluminium	35

A. Ergänzungen	37
A.1 Die Kugelflächenfunktionen	37
A.2 Drehimpulse der Photonen	40
A.3 Multipoldarstellung für Photonen konkret	41
A.4 Die Emissionswahrscheinlichkeit und die Lebensdauer	42
Literaturverzeichnis	44
Index	45

Abbildungsverzeichnis

1.1	Drehimpulsaddition anschaulich mittels Dreiecksregeln	5
2.1	Absorptionskanten beim Photoeffekt	9
2.2	Winkelverteilung der Photoelektronen	10
2.3	Der Compton-Effekt	11
2.4	Winkelverteilung des differentiellen Wirkungsquerschnitts der Comptonstreuung	13
2.5	Gesamt-Absorptionskoeffizient am Beispiel Blei	16
3.1	Niveaus der verunreinigten Kristalle	17
3.2	Schematischer Aufbau des Szintillationszählers	18
3.3	Beispiel- γ -Spektrum	20
4.1	Korrektur der Gesamtcounts auf Photopeak-counts ohne nucleus	24
5.1	Zur Bestimmung der Dynodenzahl des SEV	26
5.2	Übergänge in den Präparaten.	27
5.3	Eichmessungen mit dem Szintillator	28
5.4	Eichung des Szintillators	29
5.5	Energieauflösung in Abhängigkeit von $\frac{1}{\sqrt{E_{\text{Energie}}}}$ (Szintillator)	29
5.6	Eichmessungen mit dem Halbleiterdetektor	30
5.7	Eichung des Halbleiterdetektors	31
5.8	Spektrum des unbekanntes Präparats 1	31
5.9	Spektrum des unbekanntes Präparats 2	32
5.10	Spektrum der Hintergrundstrahlung	33
5.11	Zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten	35

1. Aussendung von γ -Strahlung durch Kerne

In diesem Versuch *γ -Szintillation* wollen wir γ -Strahlung nachweisen. Zunächst werden wir uns daher mit der Frage beschäftigen, was genau γ -Strahlung ist und welche anderen Strahlungsarten noch in der Natur vorkommen. Nachdem wir uns darüber einen kurzen Überblick verschafft haben, werden wir uns überlegen, unter welchen Umständen γ -Strahlung auftritt. Wir werden sehen, daß man entscheidende Rückschlüsse auf den aussendenden Kern machen kann. Dies ist der Grund, warum man sich auch in der aktuellen Forschung so sehr mit der γ -Quanten-Detektion befaßt.

Nachdem wir dann die Theorie der γ -Quanten-Ausstrahlung verstanden haben, werden wir uns um die Grundlagen der Wechselwirkung von γ -Quanten mit Materie kümmern. Ein Verständnis dieser Grundlagen ist u. a. Voraussetzung zur Interpretation der detektierten Spektren und wichtig für die Konstruktion einer geeigneten Detektorgeometrie (worum wir uns hier ja nicht zu sorgen brauchen...). Außerdem werden wir einen kleinen Einblick in die Absorption von γ -Strahlung in Materie gewinnen.

Wir werden dann noch beschreiben, wie die verwendeten Detektoren prinzipiell funktionieren. Die genaue Beschreibung von Halbleiterdetektoren und der Funktionsweise der nachfolgenden Elektronik werden wir erst in Versuch 17 (vgl. [FP-17]) und Versuch 7 (vgl. [FP-7]) nachholen. In diesen Versuchen beschäftigen wir uns über die Grundlagen hinausgehend eingehender mit der γ -Strahlung.

1.1 Was ist γ -Strahlung, welche Strahlungen gibt es noch?

γ -Strahlung ist nichts anderes als der Name für *elektromagnetische Strahlung* im Wellenlängenbereich $\lambda \approx 10^{-10} \dots 10^{-14}$ m. Die Angabe der Wellenlänge legt natürlich aufgrund der Beziehungen $c = \lambda\nu = \omega/\kappa$ und $E = h\nu = \hbar\omega$ auch die Frequenz und Energie der elektromagnetischen Strahlung fest. Die entsprechenden Bereiche für γ -Quanten sind also Frequenzen von $\nu \approx 3 \cdot 10^{18} \dots 3 \cdot 10^{22}$ Hz und Energien von $E \approx 10\,000 \dots 10\,000\,000$ eV, also einige keV bis ungefähr 10 MeV. Dabei ist eV die für unsere Zwecke nützliche Energieeinheit *Elektronenvolt*¹.

Elektromagnetische Strahlung wird i. a. nicht mit diesem Oberbegriff, sondern nach der Entstehungsart verschieden bezeichnet. Die wichtigsten Klassifizierungen sind dabei:

Emission aus den äußeren Elektronenschalen:	Licht
Emission aus den übrigen Elektronenschalen:	Röntgen-Strahlung
Emission aus dem Kern :	γ -Strahlung
Emission bei Abbremsung geladener Teilchen:	Bremsstrahlung

¹Ein Elektronenvolt ist die kinetische Energie, die ein Elektron gewinnt, wenn es eine Spannungsdifferenz von 1 V durchläuft. Also:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1,602 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} , \\ h &= 2\pi\hbar = 6,6262 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec} = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J sec} . \end{aligned}$$

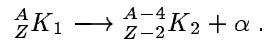
Daher entspricht 1 eV der Frequenz $2,418 \cdot 10^{14}$ Hz.

Insofern handelt es sich bei obigen Wellenlängen-, Frequenz- und Energieangaben um empirische Beobachtungen der Kernstrahlung.

Kerne emittieren nicht nur γ -Strahlung. Es treten auch α - und β -Strahlung auf.

α -Strahlung

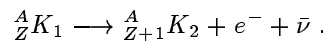
Die α -Strahlung wird meist nicht als Strahlung bezeichnet. Stattdessen spricht man davon, daß ein Kern beim α -Zerfall ein α -Teilchen aussendet. Dabei ist ein α -Teilchen ein Heliumkern, also ${}^4_2\text{He}^{2+}$. Der natürliche α -Zerfall kommt meist nur bei schweren Kernen mit $A > 133$ (A : Massenzahl) vor. Der Zerfall sieht dann so aus (K_1 : Mutterkern, K_2 : Tochterkern, A : Massenzahl von K_1 , Z : Ordnungszahl von K_1):



Also verläuft der Zerfall unter der Aussendung eines massereichen, 2-fach positiven Teilchens; der zerfallende Kern verwandelt sich in den eines anderen Elements. Mehr darüber, zur Reichweite der α -Strahlung und zur Theorie des Zerfalls findet man in [FP-9].

β -Strahlung

Auch bei der β -Strahlung spricht man meist vom β -Zerfall unter Aussendung eines β -Teilchens und eines Neutrinos. Das β -Teilchen ist meist ein Elektron (dann ist das Neutrino eigentlich ein Anti-Neutrino), bei künstlichen Kernen kann das β -Teilchen auch ein Positron sein. Eine weitere Möglichkeit ist auch der sogenannte Elektroneneinfang. Wir wollen nur den häufigsten Fall (β^- -Zerfall) mit dem Elektron kurz erwähnen; dabei wandelt sich ein Neutron in ein Proton um (Bezeichnungen wie oben).



Dieser Zerfall verläuft somit unter der Aussendung eines massebehafteten, 1-fach negativen (bzw. positiven beim Positron) Teilchens; der zerfallende Kern verwandelt sich in den eines anderen Elements. Über die Reichweite der β -Strahlung und genaueres zu allen Zerfallsmöglichkeiten findet man in [FP-11].

1.2 Übergänge zwischen Kernzuständen

Wir kehren jetzt zur γ -Strahlung zurück. Als elektromagnetische Strahlung ist γ -Strahlung im Gegensatz zu den beiden bisher besprochenen Strahlungsarten *nicht materiebehaftet* und *elektrisch neutral*. Der Kern zerfällt also nicht wie bisher, indem sich Teilchen unter Materieemission verwandeln oder der Kern einen kleinen Bestandteil abspaltet. Der Kern verwandelt sich also auch nicht in den eines anderen Elements. Die Geschehnisse im Kern sind also anderer Natur. Wir wollen uns daher zunächst über den Grundzustand und angeregte Zustände des Kernes Gedanken machen.

1.2.1 Grundzustand und angeregte Kernzustände

Die Kerne bestehen aus *Nukleonen*, das sind *Protonen* und *Neutronen*. Jedes Nukleon besitzt einen Bahndrehimpuls und einen (quantenmechanischen) Eigendrehimpuls, der Spin genannt wird. Man hat festgestellt, daß Nukleonen den Spin $\frac{1}{2}\hbar$ haben, als Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen sind sie also Fermionen, gehorchen also der Fermi-Dirac-Statistik.

Den Kern kann man modellhaft als Potentialtopf nähern, da die Kernkräfte innerhalb einer Reichweite von $1,4 \cdot 10^{-15}$ m nahezu konstant sind und im Bereich $1,4 \dots 4 \cdot 10^{-15}$ m sehr stark abfallen und schließlich verschwinden. In diesem Potentialtopf ergeben sich für jeden Kern ${}^A_Z K$ verschiedene (für den Kern typische, d. h. charakteristische) *diskrete* Energieniveaus. Jedes Energieniveau darf nach der

Fermi-Statistik von zwei Protonen mit entgegengesetztem Spin und zwei Neutronen mit entgegengesetztem Spin besetzt werden. Werden die Energieniveaus so besetzt, daß die minimale Energie angenommen wird, also der Potentialtopf „von unten her besetzt“ worden ist, so spricht man vom *Grundzustand*. Sind irgendwelche Nukleonen, aber mindestens eins, auf einem höheren Energie-Niveau als nach der Fermi-statistik möglich wäre, so spricht man von einem *angeregten Zustand* des Kerns. Solche Zustände treten häufig nach α - oder β -Zerfällen auf. Man setzt willkürlich die Energie des Grundzustands gleich Null. Die Energiedifferenzen der angeregten Zustände relativ zum Grundzustand werden somit als Energie des Kernzustands bezeichnet.

1.2.2 Charakterisierende Größen der Kerne und Auswahlregeln

Ein Kernzustand ist aber noch nicht allein durch seine Energie charakterisiert. Die charakterisierenden Größen eines bestimmten Kerns A_ZK sind vielmehr:

1. sein Impuls,
2. sein Gesamtbahndrehimpuls,
3. seine Energie (wie eben ausgeführt),
4. sein Gesamtspin, auch einfach Kernspin genannt,
5. seine Parität (dies ist eine formale Größe, die nicht direkt meßbar ist),
6. und seine Lebensdauer (dazu erst später etwas).

Hierbei sind alle Größen, mit Ausnahme der statistisch bestimmbaren Lebensdauer, *Erhaltungsgrößen* in abgeschlossenen Systemen. Die ersten beiden Größen beeinflussen aber nur die äußere Bewegungsform des Kerns oder Systems (Tochterkern und γ -Quant) als ganzes. Unser Beobachtungssystem können wir der Bewegung immer geeignet anpassen (oder die Bewegung mit uns im weiteren nicht interessierenden Kräften erklären), wir gehen daher nicht weiter auf den Gesamtimpuls und den Gesamtbahndrehimpuls ein. Da wir uns für den Kernzerfall, bzw. die γ -Abstrahlung interessieren, also innere Ereignisse im Kern, betrachten wir nun näher die Größen Energie, Gesamtspin und Parität. Sie setzen sich jeweils aus dem Zusammenspiel der Einzelteile zusammen, wie wir bereits für die Energie beschrieben haben.

Da wir Erhaltungsgrößen vorliegen haben, verteilen sie sich vom angeregten Mutterkern auf den Tochterkern (bei der Energie: niedriger angeregt oder im Grundzustand) und das abgestrahlte γ -Photon, das Quant der abgestrahlten elektromagnetischen Welle (das Teilchen im quantenmechanischen Dualismus). Das γ -Quant übernimmt also eine durch den Zerfall festgelegte Energie, einen festgelegten Spin und eine feste Parität. Diese Festlegung bezeichnet man als *Auswahlregeln*.

Energie

Wir betrachten nun zunächst wie die Auswahlregeln konkret für die Energie aussehen. Wenn also ein Kern aus einem angeregten Zustand in einen niedriger angeregten Zustand wechseln will, muß er seine Energie irgendwohin abgeben. Dies ist wie gesagt gerade das γ -Quant. Die Energie des γ -Quants berechnet sich also gemäß (E_i : Energie des angeregten Zustands, E_f : Energie des Kerns nach Abstrahlung):

$$E_\gamma = h\nu = E_i - E_f := \Delta E . \quad (1.1)$$

Eigentlich ist diese Berechnung nicht ganz exakt, weil man den Impulserhaltungssatz noch nicht beachtet hat, der eine Geschwindigkeitsänderung des Kerns und damit eine Änderung seiner kinetischen Energie bewirkt. Aufgrund der großen Kernmasse bleibt diese Größe aber fast unverändert. Korrekter ist also folgende Betrachtung: Der angeregte Kern wird als Ursprung unseres Ruhesystems genommen. Dann lautet der Energieerhaltungssatz:

$E_i = E_{\text{kin},f} + E_f + E_\gamma$. Der Impulserhaltungssatz (mit nichtrelativistischen Impulsen für die Kerne, weil die Geschwindigkeiten so klein sind) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$2M_K E_{\text{kin},f} = \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2.$$

Daraus folgt $\Delta E = E_i - E_f = E_\gamma \cdot \left(1 + \frac{E_\gamma}{2M_K c^2}\right)$. Nach Lösen der quadratischen Gleichung und Taylorentwicklung erhält man als exaktere Auswahlregel:

$$E_\gamma = M_k c^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2(\Delta E)}{M_k c^2}}\right) = \Delta E \cdot \left(1 - \frac{\Delta E}{2M_K c^2} + \dots\right). \quad \blacksquare$$

Den Gesamtspin und die Parität stellen wir nun jeweils zunächst vor, so wie wir im Abschnitt 1.2.1 die Energie erläutert hatten. Daraufhin betrachten wir die Auswirkungen der jeweiligen Erhaltungsgröße auf den γ -Zerfall durch die Auswahlregeln, so wie eben für die Energie durchgeführt.

Der Gesamtspin

Der Gesamtdrehimpuls eines Kerns, der sich aus den Bahndrehimpulsen der Nukleonen um den Schwerpunkt des Kerns und den Spins der Nukleonen ergibt, nennt man häufig *Gesamtspin* oder einfach *Kernspin*. Diese Namensgebung rechtfertigt sich, auch wenn der Kernspin kein purer Spin ist, wenn man sich den Kern nicht zusammengesetzt vorstellt, denn dann können wir trennen zwischen dem Kernbahndrehimpuls des Kerns auf seiner Bewegung durch die Welt (diesen Anteil wollten wir ja nicht weiter betrachten, indem wir unsere Bezugssysteme geeignet anpassen) und dem Spin des Kerns. Im folgenden betrachten wir den Kernspin² \underline{I} aber natürlich vektoriell zusammengesetzt als Summe aller Bahndrehimpulse \underline{l}_n und Spins \underline{s}_n der Nukleonen³. Also:

$$\underline{I} = \sum_{n=0}^Z (\underline{l}_n + \underline{s}_n).$$

An dieser Stelle wollen wir nochmal sagen, was wir mit unserer \underline{I} -Bezeichnung ausdrücken wollen. Jeder Drehimpuls ist im kräftefreien Raum ja erst durch zwei Quantenzahlen beschrieben, z. B. durch die Quantenzahlen zu den Operatoren L^2 (also einem Betrag) und L_z (also einer Richtung). Unsere Vektorschreibweise soll beide Quantenzahlen beinhalten, die Addition wird dann natürlich wie in der Quantenmechanik üblich durchgeführt (darauf gehen wir jetzt nicht nochmal exakt ein, wofür haben wir TP III gehört?). Die Betragsquantenzahl bezeichnen wir einfach mit I (ohne Unterstrich); die Richtung brauchen wir im folgenden nicht weiter (außer daß sie bei der Addition eingeht). Der Betrag des Drehimpulses ist natürlich nicht die Betragsquantenzahl I , sondern $\hbar \cdot \sqrt{I \cdot (I + 1)}$ (vgl. TP III).

Die Betragsquantenzahlen der Spins der Nukleonen sind immer $s_n = \frac{1}{2}$, die der Bahndrehimpulse sind immer ganzzahlig (wieder QM aus TP III). Da die Spins entweder parallel oder antiparallel stehen (daher $\underline{s}_n = \pm \frac{1}{2}$), ergeben sich für Kerne mit ungerader Nukleonenzahl stets halbzahlige I , für Kerne mit gerader Nukleonenzahl stets ganzzahlige I . Weiter stellt man fest, daß Kerne mit geradzahligem Protonen- und geradzahligem Neutronenzahl, die man als *gg*-Kerne bezeichnet (die anderen Fälle werden als *gu*-, *ug*- und *uu*-Kerne bezeichnet), im Grundzustand immer $\underline{I} = 0$ besitzen müssen. Das liegt daran, daß in diesem Fall sich sowohl die Protonen als auch die Neutronen sich jeweils mit entgegengesetztem Spin paaren müssen, denn anderenfalls wäre ein Nukleon auf einem zu hohen Energieniveau. Auch die Bahndrehimpulse \underline{l}_n werden dann minimal, denn $|\underline{I}|$ geht in die Energie ein. Also stellen wir fest, daß im Grundzustand *gg*-Kerne immer Kernspin $\underline{I} = 0$ besitzen, *uu*-Kerne immer ganzzahlige I und *gu*-Kerne immer halbzahlige I .

²Der Gesamtdrehimpuls des Kerns wird mit \underline{I} bezeichnet, denn das \underline{J} bleibt dem Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle vorbehalten. Tradition...

³Eine weitere, aber sinnvolle Tradition ist, die Drehimpulse der einzelnen Nukleonen durch kleine Buchstaben zu bezeichnen, die des Kerns mit großen Buchstaben.

Auswahlregeln durch den Drehimpuls

Nachdem wir also wissen, wie der Spin eines Kerns aussieht, wollen wir seine Auswirkung auf den γ -Zerfall untersuchen. Der Erhaltungssatz verlangt, daß der Kernspin des Mutterkerns gleich der Summe des Drehimpulses des Photons und des Kernspins des Tochterkerns sein muß. Der unbekannte und später meßbare Drehimpuls (nicht mit unserer Apparatur zwar, aber...) ist der des γ -Quants. Wir schreiben daher (i : initial, also Mutterkern; f : final, also Tochterkern):

$$\underline{L}_\gamma = \underline{L}_i - \underline{L}_f .$$

Hieraus folgt mittels den Regeln der Drehimpulsaddition eine Eingrenzung für die möglichen Werte des Photondrehimpulses. Wir machen diese Dreiecksregeln nochmal in der folgenden Abbildung anschaulich:

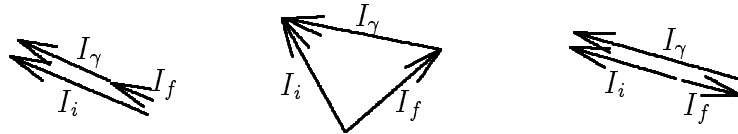


Abb. 1.1: Drehimpulsaddition anschaulich mittels Dreiecksregeln

Und nun nochmal in Formeln, wobei wir $j := I_\gamma \in \mathbb{N}$ benutzen:

$$|I_i - I_f| \leq j \leq I_i + I_f .$$

Das ist die Auswahlregel des Drehimpulses für die γ -Strahlung.

Wofür haben wir die Abkürzung $j \in \mathbb{N}$ eingeführt? Dazu ein paar Andeutungen und Begriffe, auf die wir etwas ausführlicher im Anhang A eingehen wollen. Dort werden wir auch erklären, warum das j ganzzahlig und positiv ist. Nachdem das γ -Quant abgestrahlt ist, kann man es im wesentlichen als Kugelflächenfunktion darstellen. Eine solche Entwicklung der γ -Strahlung nach Kugelflächenfunktionen nennt man *elektrische Multipolentwicklung*. Die Ordnung l der Kugelflächenfunktionen ist eng mit dem Gesamtdrehimpuls j des γ -Quants verbunden (genaueres — wie gesagt — im Anhang A). Man bezeichnet Multipole der Ordnung j als [griechischer Name für 2^j]-Pole, also z. B. nach folgender Tabelle:

Ordnung j	2^j	Bezeichnung
0	1	Monopol
1	2	Dipol
2	4	Quadrupol
3	8	Octupol
\vdots	\vdots	\vdots

Für 2^j sagt man auch häufig *Multipolordnung*, was wir nicht allzu glücklich finden, da dieser Name für Verwechslungsgefahr mit der Ordnung der Kugelflächenfunktionen sorgen kann.

Die Parität

Die *Parität* P ist eine zunächst rein formale Größe. Sie kann die Werte $+1$ bzw. -1 annehmen und beschreibt damit, ob die skalaren Wellenfunktionen (der Nukleonen, des Kerns, des γ -Quants) symmetrisch bzw. antisymmetrisch sind bzgl. Inversion, d. h. der Funktion $\Pi : \underline{r} \rightarrow -\underline{r}$. Also gilt für skalare Funktionen:

$$\begin{aligned} \Pi\psi(\underline{r}, \underline{s}) &= \psi(-\underline{r}, \underline{s}) = +\psi(\underline{r}, \underline{s}) \quad \text{für } P = +1 \text{ und} \\ \Pi\psi(\underline{r}, \underline{s}) &= \psi(-\underline{r}, \underline{s}) = -\psi(\underline{r}, \underline{s}) \quad \text{für } P = -1 . \end{aligned}$$

Die Gesamtwellenfunktion des Kerns bzw. — nach der Zerstrahlung — des Kerns und des γ -Quants ergibt sich als symmetrisiertes oder antisymmetrisiertes Tensorprodukt der einzelnen Nukleonen bzw. des γ -Quants (S_Z : Gruppe der Permutationen; Gleichung ohne $[]$ -Terme: nur Nukleonen; Gleichung in $[]$ -Form: Nukleonen mit dem γ -Quant):

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma \in S_{Z+1}} (\pm 1)^{\text{sgn}(\sigma)} |\psi_{\sigma(1)}\rangle \cdots \cdots \left[|\psi_{\sigma(\gamma)}\rangle \cdots \cdots \right] \cdot |\psi_{\sigma(Z)}\rangle .$$

Die Parität des gesamten Kerns ergibt sich somit als Produkt der Einzel-Paritäten. Die Paritäten der einzelnen Bestandteile lassen sich nicht experimentell messen. Der Sinn des Begriffs der Parität zeigt sich erst in der obigen Gleichung, da die Parität bei der Abstrahlung der γ -Quanten erhalten bleibt und wir kommen somit zur Paritäts-Auswahlregel.

Auswahlregeln durch die Parität

Aus den obigen Gleichungen für die Kerne vor und nach dem Zerfall (letzteres war die Form, in der die $[]$ -Klammern beachtet werden müssen) folgend, muß also $P_\gamma \cdot P_f = P_i$ gelten. Um dies ausnutzen zu können, müssen wir uns nun Gedanken um die Parität der Photonen machen. Im Anhang A legen wir dar, daß bei elektromagnetischer Strahlung mit Drehimpuls j zwei Photonen mit verschiedener Parität auftreten können: die mit Parität $(-1)^j$ bzw. die mit Parität $(-1)^{j+1}$. Diese nennt man dann (was bei rein klassischer Herleitung willkürlich bleibt) *elektrische* bzw. *magnetische Multipolstrahlung*. Bei einem γ -Zerfall nennt man bei Auftreten von einem $(-1)^j$ -Photon den Zerfall einen E_j -Zerfall; bei einem $(-1)^{j+1}$ -Photon handelt es sich um einen M_j -Zerfall. Wir können damit nun also aufgrund der Paritätserhaltung folgende Auswahlregeln ermitteln:

Kernübergang	mögliche Strahlungsarten
mit gleicher Parität zwischen Mutter- und Tochterkern	M1, E2, M3, E4, ...
mit unterschiedlicher Parität zwischen Mutter- und Tochterkern	E1, M2, E3, M4, ...

Beispiel

In unserem Versuch werden wir uns mit den Zerfällen von Kobalt und Cäsium beschäftigen. In der Anleitung sind die Energien, Drehimpulse und Paritäten der Kerne in den verschiedenen angeregten Zuständen und dem Grundzustand angegeben, was wir nochmals in Abbildung 5.2 auf Seite 27 geplottet haben. Diese Angaben sind zumeist gerade durch γ -Detektion ermittelt worden; wir wollen nun umgekehrt an diesen Beispielen die möglichen auftretenden Strahlungsarten herausfinden.

Zuerst Cäsium: Bei dem Zerfall können aufgrund der Drehimpuls-Auswahlregel Drehimpulse zwischen $j = 4$ und $j = 7$ auftreten. Mittels der Paritäts-Auswahlregel bei unterschiedlicher Parität zwischen Tochter- und Mutterkern ergeben sich damit als mögliche Strahlungsarten Photonen vom Typ M4, E5, M6 und E7.

Nun noch Kobalt: Beim hochenergetischen Zerfall kann über die Drehimpuls-Regel festgestellt werden, daß nur Photonen mit $j = 2$ auftreten. Da sich beim Zerfall die Parität der Kerne nicht ändert, muß die Strahlung eine E2-Strahlung sein.

Beim niederenergetischen Zerfall kann der Drehimpuls der Photonen zwischen $j = 2$ und $j = 6$ liegen. Wiederum bleibt die Parität der Kerne beim Zerfall erhalten, also treten folgende Strahlungstypen auf: E2, M3, E4, M5 und E6.

1.2.3 Auswirkungen der Auswahlregeln

Isomere Zustände und verbotene Übergänge

Wie wir schon aus den Beispielen sehen, ergeben sich aus den Auswahlregeln klare Eingrenzungen der möglichen Strahlungsarten. Wir müssen aber nun noch ein Verbot angeben, was noch nicht direkt

ersichtlich ist: ein Übergang eines Kernes mit $I_i = 0$ zu einem Kern mit $I_f = 0$, ein sogenannter $0 \rightarrow 0$ -Übergang, ist nicht möglich, er ist verboten. Der Grund dafür liegt in der Drehimpuls-Auswahlregel, denn aus dieser würde für den Gesamtdrehimpuls des Photons $j = 0$ folgen. Dies ist aber unmöglich, es muß vielmehr $j \geq 1$ gelten, weil ein Photon den Spin $s = 1$ besitzt. (Dies begründen wir im Anhang A anders und besser; insbesondere zeigen wir, daß es einen Spin für Photonen eigentlich nicht gibt.)

Desweiteren bestimmen die Auswahlregeln die Lebensdauern angeregter Kerne mit, unsere letzte charakteristische Größe. Diese wächst stark an (im gleichen Maße sinkt die Zerfallswahrscheinlichkeit), wenn die Drehimpulse der Photonen sehr groß sind und deren Energien sehr klein. Anschaulich ist dies klar, denn es ist schwierig, einem Photon einen hohen Drehimpuls aufzuzwingen; entsprechend ist ein Zerfall unrentabel, wenn der zerfallende Kern nur wenig Energie abgeben kann. Genauer geben wir wiederum in Anhang A an. Es ergibt sich, daß im wesentlichen nur E1, E2 und M1-Zerfälle häufig auftreten. Wird die γ -Emission durch die Auswahlregeln so unwahrscheinlich, daß die Lebensdauer des angeregten Zustandes 10^{-10} sec überschreitet, so spricht man von einem *isomeren Zustand*. Cäsium ist ein solches Beispiel (siehe oben). Bei diesem Präparat treten theoretisch nur M4, E5, M6 und E7-Zerfälle auf. Diese Übergänge sind so unwahrscheinlich, daß der angeregte Zustand eine Lebensdauer von 2,5 Minuten hat.

Innere Konversion

Neben dem γ -Zerfall tritt — insbesondere bei unwahrscheinlichen Zerfällen wie den isomeren Zuständen (z. B. bei unserem Beispiel Cäsium) — noch ein weiterer Effekt auf: die sogenannte *innere Konversion*. Hierbei handelt es sich um einen Konkurrenzprozeß zum γ -Zerfall: Beim Cäsium z. B. zerfallen 11% der angeregten Zustände über die innere Konversion.

Bei der inneren Konversion wird die überschüssige Energie der Anregung direkt an ein Hüllenelektron übertragen. Das ist möglich, da die Elektronen im wellenmechanischen Atommodell eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Ort des Kerns haben; ein Hüllenelektron stößt also gewissermaßen mit dem angeregten Kern. Eine genauere Beschreibung dieses Phänomens (einschließlich Messungen) haben wir in Versuch [FP-11] gegeben.

Ein wichtiger Unterschied zur γ -Strahlung sei auch hier nochmal erwähnt: Bei der inneren Konversion ist auch ein $0 \rightarrow 0$ -Übergang möglich, denn es werden keine neuen Teilchen erzeugt. Es braucht daher nicht (wie bei dem γ -Zerfall) auf den Drehimpuls neuer Teilchen (wie bei den Photonen) Rücksicht genommen werden; keine Auswahlregel wird verletzt.

Nach diesen Betrachtungen ist also deutlich geworden, daß man mittels γ -Strahlung sehr viel über Kernzustände lernen kann, insbesondere über die kernspezifischen Energieniveaus. Dazu müssen wir die Strahlung aber erst nachweisen. Da γ -Quanten neutral sind, müssen wir uns als nächstes überlegen, welche Wechselwirkung wir zum Nachweis nutzen können. Außerdem, was wichtiger ist, müssen wir uns klar machen, welchen Einfluß diese Wechselwirkungen auf die γ -Quanten *vor* dem Nachweis haben. Wir wollen also jetzt eine theoretische Betrachtung der Wechselwirkungen der γ -Quanten mit Materie durchführen.

2. Wechselwirkung von γ -Strahlung mit Materie

Wir haben im letzten Kapitel betont, daß γ -Strahlung elektrisch neutral ist und gequantelt auftritt. Dies bedeutet auch, daß ihr Absorptionsverhalten als Intensitätsabnahme beobachtbar ist, es müssen also jeweils ganze Quanten absorbiert werden. (Das bedeutet nicht, daß nicht andere (energieärmere) Quanten bei einer Absorption entstehen können (s. u.). Dies geschieht aber i. a. nicht ohne eine Richtungsänderung.) Bei der Intensitätsabnahme verringert sich also die Zahl der Teilchen und nicht ihre Energie. Im Gegensatz dazu können elektrisch geladene, massebehaftete Teilchen in elektromagnetischen Feldern abgebremst werden. Das bedeutet, daß nicht die Zahl der Teilchen, also die Intensität des Teilchenstrahls, verringert wird, sondern die Energie jedes Teilchens. Dieses zweite, qualitativ unterschiedliche Absorptionsverhalten werden wir genauer in Versuch 9 ([FP-9]) untersuchen.

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, welche Arten der γ -Quantenabsorption prinzipiell möglich sind. Wir können zum einen danach unterscheiden, mit *welchem Teil der Materie* die γ -Quanten wechselwirken. Zur Verfügung stehen:

- Atomelektronen,
- die Kerne,
- die elektrischen Felder von Elektronen und Kernen und
- Mesonenfelder der Kerne.

Letzteres kann man erst mittels der “Quarktheorie” (der Quantenchromodynamik QCD) richtig verstehen. Wir brauchen uns hier nicht näher damit auseinanderzusetzen, da in unserer Praxis kein Effekt auftritt, der mit Mesonenfeldern zusammenhängt.

Zum zweiten können wir das *Ergebnis der Wechselwirkung* zur Klassifizierung heranziehen. Hier gibt es folgende Möglichkeiten:

- *Totale Absorption*, das γ -Quant ist vollständig verschwunden.
- *Inkohärente Streuung*, das bedeutet: Das γ -Quant wird absorbiert und ein niederenergetisches wird emittiert. Diese Art der Streuung wird häufig auch inelastisch genannt, was aber so nicht so ganz sinnvoll ist (s. unten).
- *Kohärente Streuung*. Hierbei ändert das Quant seine Ausbreitungsrichtung, nicht aber seine Energie.

Diese beiden Einstufungsarten bieten 12 verschiedene Kombinationsmöglichkeiten für die Wechselwirkung zwischen γ -Quanten und Materie. In der Praxis kommen aber — wie oben schon angedeutet — nur einige der Kombinationen vor. Es sind die folgenden:

- *Photoeffekt* (oder *lichtelektrischer Effekt*): totale Absorption an Atomelektronen.
- *Comptoneffekt* bzw. *-Streuung*: inkohärente Streuung an Elektronen.
- *Paarbildung*: totale Absorption in elektrischen Feldern.

Wir wollen nun im einzelnen auf diese Effekte eingehen:

2.1 Der Photoeffekt

Beim Photoeffekt wird ein gebundenes Elektron durch ein γ -Quant in einen energetisch höheren Zustand gehoben oder, was der uns interessierende Fall ist, vollständig aus dem Atomverband gelöst. Das γ -Quant wird bei diesem Vorgang vollständig absorbiert. Es ist hierbei wichtig zu betonen, daß es sich um ein gebundenes Elektron handelt, da ein freies Elektron bei einem Stoß mit einem γ -Quant nicht alleine simultan den Impuls- und Energieerhaltungssatz erfüllen kann. Beim gebundenen Elektron dient das Atom als weiterer Stoßpartner, der den Hauptteil des Impulses aufnehmen kann. Wegen der hohen Masse des Atoms bleibt dennoch die Geschwindigkeit des Atoms, und damit seine kinetische Energie so niedrig, so daß man näherungsweise sagen kann, daß für die kinetische Energie T des Elektrons gilt:

$$T = h\nu - B_e .$$

Dabei ist B_e die schalenabhängige Bindungsenergie, für die man (nach [Mar]) näherungsweise

$$\begin{aligned} \text{K-Elektronen} &: B_e = \text{Ry}(Z - 1)^2 \\ \text{L-Elektronen} &: B_e = \frac{\text{Ry}}{4}(Z - 5)^2 \\ \text{M-Elektronen} &: B_e = \frac{\text{Ry}}{9}(Z - 13)^2 \end{aligned}$$

setzen kann. Dabei gilt $\text{Ry} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13,61 \text{ eV}$ (das ist die sogenannte *Rydberg-Konstante*), was die Ionisationsenergie des Wasserstoffatoms ist.

Die durch das ausgeschlagene Elektron freigewordene Stelle wird durch Elektronen höherer Schalen wieder aufgefüllt. Diese senden dabei ihre charakteristische Röntgenstrahlung aus.

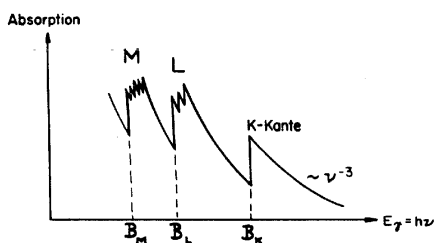


Abb. 2.1: Absorptionsstärke beim Photoeffekt in Abhängigkeit der Energie der γ -Quanten. (Bild eingescannt aus Marmier [Mar])

Da wegen der zu erfüllenden Impulserhaltung die Bindung der Elektronen so wichtig ist, sind folgende Dinge klar: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Photoeffekts steigt mit der Ordnungszahl des wechselwirkenden Materials, da ja die Bindungsstärke mit Z^2 zunimmt; und der Photoeffekt mit inneren Schalen ist häufiger als der mit äußeren. Da aufgrund der geringeren Bindungsenergie der äußeren Schalen der Photoeffekt aber bereits bei geringeren γ -Energien auftreten kann, ergibt sich, wenn man auch noch die Feinstruktur der Hauptschalen beachtet, die in Abbildung 2.1 dargestellte Abhängigkeit der Absorptionsstärke von der Energie der einfallenden γ -Quanten.

Da neben der eben dargestellten Z^2 -Abhängigkeit der Bindungsenergie mit steigendem Z auch mehr (aber schwächer gebundene) Elektronen zur Reaktion zur Verfügung stehen, kann man qualitativ erwarten, daß die Absorptionswahrscheinlichkeit, also entsprechend der Wirkungsquerschnitt, noch stärker von Z abhängt als Z^2 . Es ist weiterhin leicht einzusehen, daß der Wirkungsquerschnitt mit steigender γ -Quantenenergie sinken muß (wie schon in der Abbildung

2.1 gezeichnet), denn wenn diese Energie steigt, sehen die gebundenen Elektronen im Vergleich verhältnismäßig frei aus. Anders ausgedrückt, es wird immer schwieriger, die hohe Energie und den hohen Impuls auf das Atom und das Elektron zu verteilen.

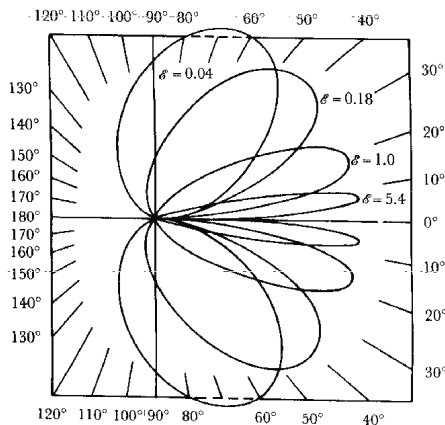


Abb. 2.2: Polar representation of the angular distribution of photoelectrons for various reduced incident γ energies $\mathcal{E} \equiv h\nu/m_e c^2$. The major axes of the curves have been normalized to the same magnitude for ease of comparison: however, this suppresses the marked variation of the differential cross section with energy \mathcal{E} . (Bild eingescannt und Bildunterschrift aus [MS].)

innersten Schale und ergeben leicht unterschiedliche Abhängigkeiten. Da wir in diesem Rahmen die „schwierigen und mühsamen“ Rechnungen (Hertz) nicht nachvollziehen können, haben wir auch nur geringen Überblick, wo genau die Näherungen anwendbar sind und wo nicht. Auch wenn uns also der Sinn verborgen bleibt, diese Formeln nachzuschauen, werden wir sie nun hier angeben (dann brauchen wir wenigstens nicht die Literatur auszuleihen und können hier nachschauen...). Für $E_\gamma \gg B_K$ fand Heitler:

$$\sigma_{\text{Photo}} = 4\sqrt{2} \cdot \alpha^4 \sigma_{0,\text{Elektr}} \cdot Z^5 \cdot \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar\omega}\right)^{7/2} \quad [\text{cm}^2/\text{Atom}].$$

Dabei ist $\sigma_{0,\text{Elektr}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi e^4}{m_0^2 c^4} = 0,6652 \cdot 10^{-24} \frac{\text{cm}^2}{\text{Elektron}} = 0,6652 \cdot \frac{\text{barn}}{\text{Elektron}}$ der *Thomson'sche Streukoeffizient* und $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ die *Feinstrukturkonstante*. (Weiterhin: $m_e = m_0 = \text{Elektronenmasse}$). Für $E_\gamma \gg m_0 c^2$ gilt nach Sauter:

$$\sigma_{\text{Photo}} = 1,5 \cdot \alpha^4 \sigma_{0,\text{Elektr}} \cdot Z^5 \cdot \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar\omega}\right) \quad [\text{cm}^2/\text{Atom}].$$

2.2 Der Comptoneffekt

Konventionen

Um gleich alle Bezeichnungen parat zu haben, beginnen wir hier mit ein paar Konventionen: Mit dem Index i , wie *initial*, bezeichnen wir das Elektron und das γ -Quant vor dem Stoß, mit Index f , wie *final*,

¹ nämlich:

W. Heitler: *Quantum Theory of Radiation*. 3. Auflage, London 1954 und:

F. Sauter: *Ann. Phys.* 9, 217 (1931); *Ann. Phys.* 11, 454 (1931).

diese Teilchen nach dem Stoß. Weiterhin numerieren wir das γ -Quant durch eine 1 und das Elektron durch eine 2. In den folgenden relativistischen Gleichungen werden wir bezüglich griechischer Indices das Ricci-Kalkül verwenden (vgl. [Rel1]). Das bedeutet, daß die Skalarprodukte zweier Vektoren a^μ und b_ν bezüglich einer Pseudo-Riemannschen Metrik $g_{\mu\nu}$ durchgeführt werden. In unserem Fall gleich, der speziellen Relativitätstheorie, gilt natürlich $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Weiterhin ist das Inverse sehr einfach bildbar: $(g_{\mu\nu})^{-1} =: g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = g_{\mu\nu}$. Räumliche, dreidimensionale Vektoren werden wir durch einen Pfeil kennzeichnen, Produkte solcher Vektoren werden mittels des kanonischen Skalarprodukts des \mathbb{R}^3 gebildet.

Weiterhin benutzen wir die üblichen Abkürzungen: $\beta := \frac{v}{c}$ und $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Wir müssen nun noch kurz etwas über Skalare und die sogenannten Vierervektoren in der Relativitätstheorie sagen, damit keine Mißverständnisse auftreten. Wir benutzen die Masse als Skalar. Das bedeutet, daß unsere Massen m bei *jedem* Auftreten die sonst als Ruhmassen bezeichneten sind². Weiterhin benutzen wir die üblichen Raumzeit-Vierervektoren, die die Weltlinien beschreiben: $x^\mu = (ct, \vec{x})$. Um nun die Geschwindigkeit unseres Teilchens auf seiner Weltlinie als Vierervektor zu erhalten, müssen wir nach seiner Eigenzeit τ differenzieren. Für diese gilt differentiell $d\tau = \frac{1}{\gamma} \cdot dt$. Damit erhalten wir die Vierer-Geschwindigkeit $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$. Den Viererimpuls definieren wir ganz kanonisch: $p^\mu = m \cdot u^\mu$, also gilt³ $p^\mu = (\gamma m c, \gamma m \vec{v})$. Wir bestimmen den Betrag (bzgl. des Pseudo-Riemann'schen Produkts $g_{\mu\nu}$) des p^μ :

$$p^\mu p_\mu = m^2 (\gamma^2 (c^2 - v^2)) = m^2 \cdot \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2. \quad (2.1)$$

Mit den Identifikationen $E := \gamma m c^2$ und $\vec{p} := \gamma m \vec{v}$, auf deren Herkunft wir hier nicht näher eingehen, ergibt sich $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$. Insbesondere erhält man hierdurch die wichtige Energie-Impuls-Beziehung

$$c^2 \cdot p^\mu p_\mu = E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (2.2)$$

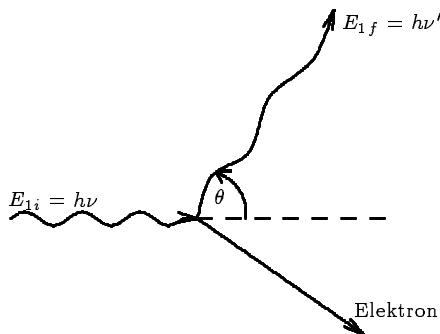


Abbildung 2.3: Der Compton-Effekt

Der Effekt

Wir haben schon erwähnt, daß beim Comptoneffekt das γ -Quant inkohärent an einem freien oder schwach gebundenen, ruhenden Elektron gestreut wird. Das bedeutet, daß ein γ -Quant einer bestimmten Frequenz, Wellenlänge und Energie auf ein freies, ruhendes Elektron zufließt und mit ihm stößt, so daß das Elektron und ein anderes γ -Quant niedrigerer Energie und damit auch niedrigerer Frequenz und größerer Wellenlänge wegfliegen (vgl. Abbildung 2.3). Bei uns sind die freien Elektronen in Wirklichkeit nur quasifreie Elektronen; es handelt sich um die schwach gebundenen Elektronen der äußeren Atomschalen. Wir betrachten das Elektron im folgenden als ideal freies.

Was bedeutet hier inkohärent und warum ist der Begriff inelastisch hier eigentlich unangebracht? Daß man die eben beschriebene Streuung inkohärent nennt, ist klar und sinnvoll; denn bei einem Beschuß von Elektronen durch γ -Quanten gleicher Energie und Wellenlänge, also vorher kohärenter Strahlung,

²Man beachte, daß dadurch Formeln das gewohnte Aussehen ändern können, z.B. $E = \gamma m c^2$. Aber immerhin handelt man sich keinen Begriff ein, der weder Skalar, noch Vektor, noch irgendein anderer Tensor (noch Konnexion, noch...) ist.

³Wir sehen also an dieser Stelle und an den folgenden Identifikationen, daß der Faktor γ aus der Berechnung der Geschwindigkeit, also der Differentiation nach der Eigenzeit (statt nach t) in die Formeln kommt, also nicht durch das m . Dies bestätigt nochmal, daß es sinnvoll ist, daß wir die Masse als Skalar betrachten.

entstehen — wie wir noch exakt ausrechnen werden — neben den durchgehenden γ -Quanten noch andere γ -Quanten mit einer Energie zwischen einer Minimalenergie und der Energie der einfallenden Quanten, entsprechend einer Wellenlänge zwischen einer Maximalwellenlänge und der einfallenden Wellenlänge. Die auslaufende Strahlung hat also sehr unterschiedliche Wellenlängen, sie ist also inkohärent. Dennoch nennen manche Leute diese Streuung auch inelastisch. Diese Begriffsbildung ist darin begründet, daß man nur das γ -Quant betrachtet und sagt: Das γ -Quant hat bei der Streuung an Energie verloren, also ist der Stoß inelastisch. Nun ja, korrekterweise muß man natürlich beide Teilchen betrachten, das γ -Photon und das Elektron. Insbesondere deshalb, weil das Elektron bei der Detektion ziemlich wichtig ist, wie wir noch sehen werden. Üblicherweise bezeichnet man nun einen Stoß inelastisch, wenn ein innerer Freiheitsgrad der stoßenden Teilchen angeregt wurde und somit Energie aufnimmt, die der Bewegung der Teilchen die entsprechende Energie entzieht (z. B. eine Feder, mit der zwei Wagen verbunden sind, kann schwingen und so Energie aufnehmen). Bei der Compton-Streuung gibt es aber keine inneren Freiheitsgrade, denn beide Teilchen sind frei. Es geht also keine Energie verloren, sie wird nur von dem einfallenden Photon auf das ausfallende Photon und das Elektron verteilt. Wenn man also beachtet, daß das Elektron auch noch da ist, kann man nicht rechtfertigen, die Compton-Streuung inelastisch zu nennen. (Wenn das Elektron schwach gebunden ist, hat es mit dem bindenden Atom innere Freiheitsgrade, die angeregt werden können. Dies ist aber nur eine Störung unserer idealen Compton-Streuung.)

Rechnungen

Wir wollen nun die Energie des auslaufenden γ -Quants in Abhängigkeit der Energie des einfallenden Photons und des Streuwinkels θ (vgl. Abb. 2.3) berechnen. Dazu benutzen wir die Energie- und Impulserhaltung in der Form der Vierer-Impuls-Erhaltung:

$$p_{1i}^\mu + p_{2i}^\mu = p_{1f}^\mu + p_{2f}^\mu \quad \Longrightarrow \quad p_{1i}^\mu + p_{2i}^\mu - p_{1f}^\mu = p_{2f}^\mu .$$

Wir quadrieren diese Gleichung nun, dividieren durch 2 und nutzen Glg. (2.1):

$$m_1^2 c^2 + p_{1i}^\mu p_{\mu 2i} - p_{1i}^\mu p_{\mu 1f} - p_{2i}^\mu p_{\mu 1f} = 0 .$$

Wir nutzen nun, daß die Photonen keine Massen haben, $m_1 = 0$, und daß das Elektron vor dem Stoß ruht, also $p_{2i}^\mu = (p_{2i}^0, \vec{0}) = (\frac{E_2}{c}, \vec{0})$. Damit lösen wir das Pseudo-Riemann'sche Produkt unter Nutzung des \mathbb{R}^3 -Skalarproduktes auf:

$$p_{1i}^0 p_{0 2i} - p_{1i}^0 p_{0 1f} + \left| \vec{p}_{1i} \right| \cdot \left| \vec{p}_{1f} \right| \cdot \cos(\theta) - p_{2i}^0 p_{0 1f} = 0 .$$

Aus Glg. (2.2) und $m_1 = 0$ folgt $\left| \vec{p}_1 \right| = \frac{E_1}{c}$ (sowohl für i , vorher, als auch für f , nachher). Damit folgt nach Multiplikation mit c^2 :

$$E_{1i} E_{2i} - E_{1i} E_{1f} + E_{1f} E_{1i} \cdot \cos(\theta) - E_{2i} E_{1f} = 0 .$$

Mittels Gleichung (2.1) und $\left| \vec{p}_{2i} \right| = 0$ folgt $E_{2i} = m_2 c^2$. Nach Auflösung nach E_{1f} erhalten wir damit:

$$E_{1f} = \frac{E_{1i} E_{2i}}{E_{1i} - E_{1i} \cos(\theta) + E_{2i}} = \frac{E_{1i} \cdot m_2}{\frac{E_{1i}}{c^2} (1 - \cos(\theta)) + m_2} .$$

Abschließend erhalten wir durch $E_{1i} = h\nu$ die gesuchte Formel:

$$E_{1f} = \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{m_2 c^2} (1 - \cos(\theta)) + 1} . \quad (2.3)$$

Wir können hieraus natürlich auch den maximalen Energieübertrag ablesen; er tritt natürlich genau dann ein, wenn das Photon sich den Kopf einrennt, genau auf das Elektron trifft und im Winkel π zurückgeschleudert wird. Das auslaufende Photon hat dann noch die Restenergie von

$$E_{\text{Rest}} = \frac{h\nu}{\frac{2h\nu}{m_e c^2} + 1}. \quad (2.4)$$

Insbesondere erkennen wir, daß niemals die vollständige Energie übertragen wird; also nochmals: Der Photoeffekt, also die vollständige Absorption des γ -Quants kann nicht an freien Elektronen stattfinden.

Für hohes $h\nu$ ist die Restenergie gerade $E_{\text{Rest}} = \frac{m_e c^2}{2} = 256 \text{ keV}$. Wie wir später sehen werden, können die gestreuten γ -Quanten den Detektor verlassen, in so einem Fall entschwinden also mindestens 256 keV. Der Abstand zwischen dem Photopeak und der Comptonkante wird also näherungsweise 256 keV betragen. Wegen mehrfacher Compton-Streuung verschmiert allerdings die Comptonkante.

Verschiedene Informationen: Wirkungsquerschnitte, . . .

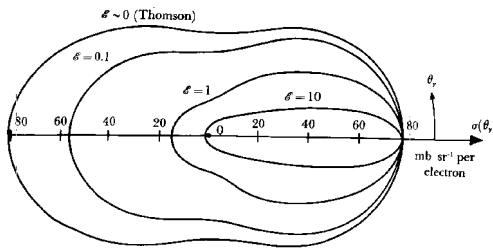


Abb. 2.4: Polar representation of the angular dependence of the differential cross section for Compton scattering of unpolarized radiation for various values of the reduced incident energy $\mathcal{E} \equiv h\nu/m_e c^2$ (Bild eingescannt und Bildunterschrift aus [MS]).

Die Winkelabhängigkeit dieses differentiellen Wirkungsquerschnitts ist in Abbildung 2.4 dargestellt (eingescannt aus [MS]).

Aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt kann man (durch Integration über den Raumwinkel) den totalen Wirkungsquerschnitt der Compton-Stöße berechnen. Es ergibt sich in Abhängigkeit von der reduzierten Energie $\mathcal{E} \equiv h\nu/m_e c^2$:

$$\sigma_{\text{Elektron}} = 2\pi r_0^2 \cdot \left\{ \frac{1+\mathcal{E}}{\mathcal{E}^2} \cdot \left[\frac{2(1+\mathcal{E})}{1+2\mathcal{E}} - \frac{1}{\mathcal{E}} \cdot \ln(1+2\mathcal{E}) \right] + \frac{1}{2\mathcal{E}} \cdot \ln(1+2\mathcal{E}) - \frac{1+3\mathcal{E}}{(1+2\mathcal{E})^2} \right\}.$$

Abschließend wollen wir noch erwähnen, daß man häufig den Compton-Wirkungsquerschnitt pro Elektron auf einen solchen pro Atom umrechnet. Dies ist nur sinnvoll möglich, wenn die γ -Quanten-Energie groß ist gegenüber den Bindungsenergien der Elektronen, so daß diese als quasifrei betrachtet werden können. Sie wirken dann als Z freie Elektronen. Es gilt daher:

$$\sigma_{\text{Atom}} = Z \cdot \sigma_{\text{Elektron}}.$$

Allzu realitätsnah ist das zwar nicht gerade, aber als Näherung für große Energien wohl recht brauchbar. . .

Um Wirkungsquerschnitte, usw. anzugeben, müßte man wieder relativistische Quantenmechanik betreiben. Da das hier zu weit führen würde, zitieren wir hier wieder nur Ergebnisse. Die folgenden Formeln haben wir aus dem Marmier [Mar] abgeschrieben (die dort stehenden Gleichungen stammen wieder aus dem Heitler, vgl. Fußnote 1). Die Gleichung für den differentiellen Compton-Stoß-Wirkungsquerschnitt (bezogen auf *ein* Elektron) trägt den Namen *Klein-Nishina-Formel* und lautet:

$$\frac{d\sigma_{\text{Elektron}}}{d\Omega_\gamma} = \frac{1}{4} \cdot r_0^2 \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2 \cdot \left(\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu} - 2 + 4 \cos^2(\theta) \right).$$

Dabei ist $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$ der klassische Elektronenradius, ν die Frequenz des einfallenden und ν' die Frequenz des dieses differentiellen Wirkungsquerschnitts ist in Abbil-

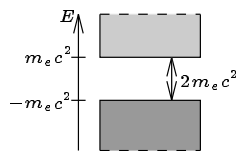
2.3 Die Paarbildung

Wenn die γ -Energie $h\nu$ größer als die doppelte Ruheenergie des Elektrons $2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV}$ ist, so kann das γ -Quant unter gleichzeitiger Bildung eines Elektrons und eines Positrons vernichtet werden. Die überschüssige Energie übernehmen die erzeugten Teilchen als kinetische Energie:

$$E_{\text{kinEl}} + E_{\text{kinPos}} = h\nu - 1,022 \text{ MeV}.$$

Die Absorption des γ -Photons und die Erzeugung des Elektrons und seines Antiteilchen ist nur in Gegenwart eines weiteren Stoßpartners möglich: Der Impulsbetrag des Photons ist (da $m_{\text{Photon}} = 0$; vgl. Glg. (2.2)) $p := |\vec{p}| = \frac{E}{c}$. Wegen der Energieerhaltung müßte nun $|\vec{p}| = (\gamma_{\text{El}} + \gamma_{\text{Pos}}) \cdot m_e c$ gelten (in γ_{El} geht die Geschwindigkeit des Elektrons v_e ein, analog Positron). Für den Impuls der beiden erzeugten Teilchen gilt aber nun $\vec{p}_f = m_e \cdot (\gamma_{\text{El}} \cdot \vec{v}_{\text{El}} + \gamma_{\text{Pos}} \cdot \vec{v}_{\text{Pos}})$. Da $v_{\text{El}} < c$ und $v_{\text{Pos}} < c$, gilt $p_f < p$. Um also zusätzlichen Impuls aufzunehmen, brauchen wir noch einen Stoßpartner. Bei der Paarbildung nehmen die Kerne über ihre elektrischen Felder (und bei höheren Energien auch Elektronen durch ihre Felder) diesen Impuls auf. Im Falle der Kerne wird wegen der großen Masse kaum Energie auf den Kern übertragen; obige Gleichung über die kinetischen Energien gilt also ziemlich gut. Im Falle des Elektrons übernimmt auch dieses Elektron Energie. Wir haben dann 2 Elektronen und ein Positron und obige Gleichung gilt mit diesen drei Teilchen.

Im weiteren Verlauf verhalten sich die Elektronen (oder das Elektron) wie die Elektronen aus Photo- oder Comptoneffekt und werden ganz entsprechend detektiert (vgl. das Detektorkapitel). Was passiert nun mit dem Positron? Es gibt — mit den gleichen Phänomenen wie ein Elektron — seine kinetische Energie an den Detektor oder sonstigen Festkörper ab. Wenn es dann nach 10^{-13} sec auf thermische Geschwindigkeiten abgebremst ist, trifft es auf ein freies (na ja, wie immer: quasifreies), ruhendes Elektron und zerstrahlt mit ihm durch den umgekehrten Prozeß. Es entstehen dabei 2 Photonen, die man Röntgenquanten nennt, weil sie ja aus den Elektronenschalen kommen, und beide jeweils die Energie 511 keV besitzen. Sie fliegen wegen Impulserhaltung diametral auseinander. Wir werden noch beschreiben (vgl. Abschnitt 3.3), daß die sogenannten Escape-Signale dadurch entstehen, daß eines der Quanten oder beide den Detektor undetektiert verlassen.



Als kurzen Einschub wollen wir den *Diracsee* vorstellen. Er dient als schönes Modell für Teilchen und Antiteilchen im Falle von Fermionen. Dirac erkannte nämlich, daß freie Elektronen nach der Gleichung (2.2), die auch in der Quantenmechanik gilt, sowohl positive wie negative Energie-Eigenwerte besitzen:

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}.$$

Man erkennt, daß bis auf eine Barriere von $2m_e c^2$ jeder positive oder negative Energiewert angenommen werden kann. Hiernach müßte die Welt zerstrahlen, denn jedes Elektron könnte immer weiter Energie abgeben. Dirac schlug folgende Hypothese vor: Die Bereiche der negativen Eigenwerte ist im Grundzustand lückenlos aufgefüllt (unter Beachtung des Pauli-Prinzips). Diese Eigenwerte werden daher nicht wahrgenommen. Hingegen sind Elektronen im positiven Eigenwertbereich wahrnehmbar, da dieser Bereich nicht vollständig besetzt ist (fast völlig leer sogar...). Übergänge vom positiven in den negativen Bereich ist im Grundzustand wegen des Pauli-Prinzips verboten. Trifft nun z. B. ein γ -Quant mit einer Energie größer der Barriere auf ein Elektron negativer Energie, so hebt es das Elektron auf einen positiven Eigenwert, dieses Elektron wird damit wahrnehmbar. Die zurückbleibende Lücke wird ebenfalls im Untergrund wahrnehmbar. Es benimmt sich wie ein Elektron mit positiver Ladung, weil gegenüber dem gewöhnlichen Zustand ja ein Elektron fehlt. Die Elektron-Positron-Vernichtung ist jetzt einfach das Zurückfallen eines Elektrons in den freien negativen Energiezustand.

Wir sagen nun wieder etwas zu dem totalen Wirkungsquerschnitt: Erneut hat Heitler schwierige Rechnungen durchgeführt (vgl. erneut Fußnote 1 auf Seite 10) und folgende Näherungen gefunden. Für kleine

γ -Energien ist die Abschirmung der Kernfelder durch die Hüllenelektronen vernachlässigbar und man erhält (mit den bereits benutzten Bezeichnungen):

$$\sigma_{\text{Paar}} = r_0^2 \alpha \cdot Z^2 \left(\frac{28}{9} \ln \left(\frac{2h\nu}{m_e c^2} \right) - \frac{218}{27} \right).$$

Bei großen γ -Energien muß man die Abschirmung der Hüllenelektronen voll beachten und man erhält:

$$\sigma_{\text{Paar}} = r_0^2 \alpha \cdot Z^2 \left(\frac{28}{9} \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) - \frac{2}{27} \right).$$

2.4 Absorptionsverhalten von γ -Strahlung

Wir haben in den letzten Abschnitten jeweils die Wirkungsquerschnitte angegeben. Da diese so etwas wie die Wahrscheinlichkeit angeben, daß die Photonen absorbiert werden, wird es uns nun möglich sein, aus den Wirkungsquerschnitten sogenannte Absorptionskoeffizienten μ zu bestimmen.

Die Wirkungsquerschnitte für den Photoeffekt und die Paarbildung waren jeweils auf ein Atom bezogen, da jede Absorption an einem Elektron eines Atoms oder einem Kern stattfand. Da die Photonen bei diesen Effekten vollständig absorbiert werden, erhalten wir die Absorptionskoeffizienten einfach durch Multiplikation der Wirkungsquerschnitte mit der Dichte der Atome $n = \frac{\text{Anzahl der Atome}}{V}$. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Photo}} &= n \cdot \sigma_{\text{Photo}} \quad \text{und} \\ \mu_{\text{Paar}} &= n \cdot \sigma_{\text{Paar}}. \end{aligned}$$

Zum Compton-Effekt müssen wir uns noch ein paar Gedanken machen: Wir haben oben schon auf den Wirkungsquerschnitt des Atoms σ_{Atom} umgerechnet und hätten damit eigentlich die gleichen Voraussetzungen wie bei den anderen Effekten. Aber hier wird das γ -Quant nicht vollständig absorbiert, sondern in ein energieärmeres verwandelt. Bisher haben wir den Compton-Wirkungsquerschnitt für den Stoß des einfallenden γ -Quants aus der Literatur entnommen. Das bedeutet, daß unser σ_{Atom} der Wahrscheinlichkeit entspricht, daß aus dem einfallenden Strahl ein Photon der Energie $h\nu$ verloren geht. Das entstandene Photon der kleineren Energie $h\nu'$ fand noch keine Beachtung. Für jedes absorbierte einfallende Photon entsteht aber gerade ein Photon der Energie $h\nu'$. Die Wahrscheinlichkeit für das Entstehen eines Photons der Energie $h\nu'$ aus einem einfallenden der Energie $h\nu$ beträgt also (wenn wir wieder den Compton-Effekt an einem ganzen Atom betrachten):

$$\sigma_{\text{Streu}} = \frac{h\nu'}{h\nu} \cdot \sigma_{\text{Atom}}.$$

Schön, jetzt wissen wir wieviele Photonen der Energie $h\nu$ absorbiert werden und wieviele Photonen der geringeren Energie entstehen. Also ist die absorbierte Energie gerade

$$\sigma_{\text{Compton}} = \sigma_{\text{Atom}} - \sigma_{\text{Streu}}.$$

Mit diesem σ_{Compton} können wir nun wie oben auf den Absorptionskoeffizienten umrechnen:

$$\mu_{\text{Compton}} = n \cdot \sigma_{\text{Compton}}.$$

Nun sind die einzelnen Effekte voneinander unabhängig, d. h. jeder Effekt trägt seine Summe dazu bei, daß Photonen absorbiert werden. Aus diesem Grunde definiert man nun den Gesamt-Absorptionskoeffizienten durch

$$\mu := \mu_{\text{Photo}} + \mu_{\text{Compton}} + \mu_{\text{Paar}}.$$

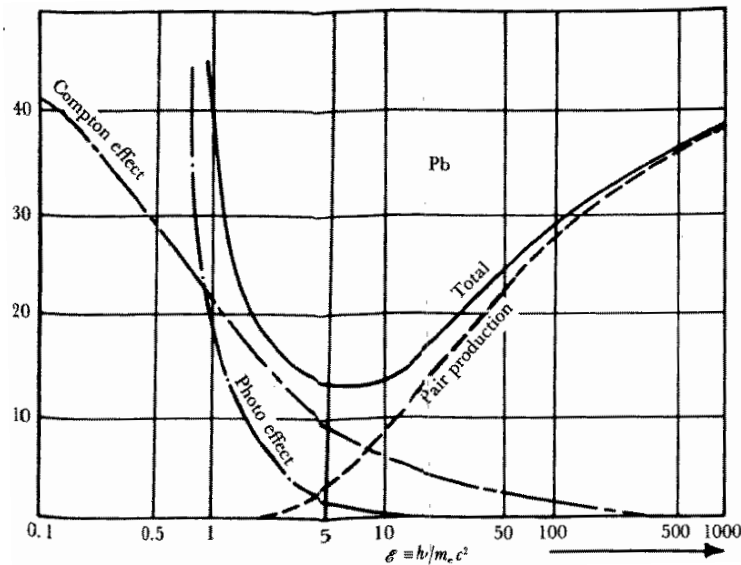


Abbildung 2.5: Total linear attenuation coefficients μ in function of the reduced γ energy $\mathcal{E} \equiv E_\gamma/m_e c^2$ for lead in semilogarithmic representation. [...] The ordinate units are cm^2/atom . (Bild eingescannt und Bildunterschrift aus [MS].)

In Abbildung 2.5 haben wir eine Graphik eingescannt (aus [MS]), in der die einzelnen und der gesamte Absorptionskoeffizient (aber wieder durch n dividiert...) am Beispiel Blei eingezeichnet sind.

Für die Intensitätsänderung dI gilt nun empirisch folgende Differentialgleichung (I : Intensität, dx : Eindringtiefen-Änderung):

$$dI = -\mu \cdot I \cdot dx .$$

Dies ist auch vollkommen anschaulich: Das Minuszeichen beschreibt, daß die Intensität abnimmt, also absorbiert wird. Nun ist diese Absorption um so größer, wenn die Intensität des Strahls größer ist (also mehr absorbierbar ist), der Strahl tiefer eindringt (also an mehr Absorptionszentren vorbeifliegt) oder das Material besonders absorptionsfreudig ist, was gerade durch den Absorptionskoeffizienten beschrieben wird. Durch Integration dieser Differentialgleichung erhält man für die Intensitätsabnahme das folgende exponentielle Gesetz:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x} . \quad (2.5)$$

3. Detektoren und Spektren

Nachdem wir uns bisher mit den theoretischen Grundlagen, die für einen Nachweis der γ -Strahlung nötig sind oder auch dabei störend wirken können, befaßt haben, wollen wir uns im folgenden um die praktische Umsetzung kümmern.

Der Nachweis von γ -Strahlung wird in der Praxis durch folgende Apparate geführt:

- Szintillationszähler,
- Halbleiterdetektoren.

3.1 Der Szintillationszähler

Zunächst diskutieren wir hier die Eigenschaften und Charakteristiken des Szintillationszählers. Ein Szintillationszähler besteht aus einem Szintillationskristall, in dem die Teilchen registriert werden, und einem *Sekundärelektronenvervielfacher*, kurz SEV, oder auch *Photomultiplier* genannt. Nach diesem folgt die übliche Elektronik. Für diesen Aufbau vergleiche man — auch im folgenden — mit unserer Zeichnung 3.2.

Wir befassen uns zunächst mit dem detektierenden Kristall. Das Grundprinzip eines solchen Szintillationskristalls besteht darin, daß feste bzw. flüssige Körper Lichtquanten emittieren, wenn sie von schnellen, *geladenen* Teilchen, wie z. B. Elektronen (aber nicht γ -Quanten (die sind ja ungeladen)), getroffen werden. Diese festen Körper sind in praxi entweder organische Kristalle, wie Anthrazen, oder anorganische Kristalle. Mit letzteren wollen wir uns zunächst befassen.

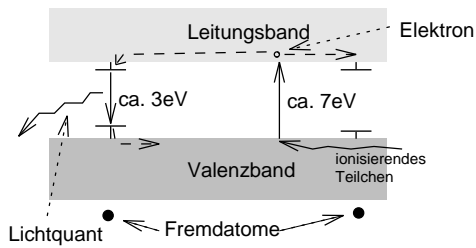
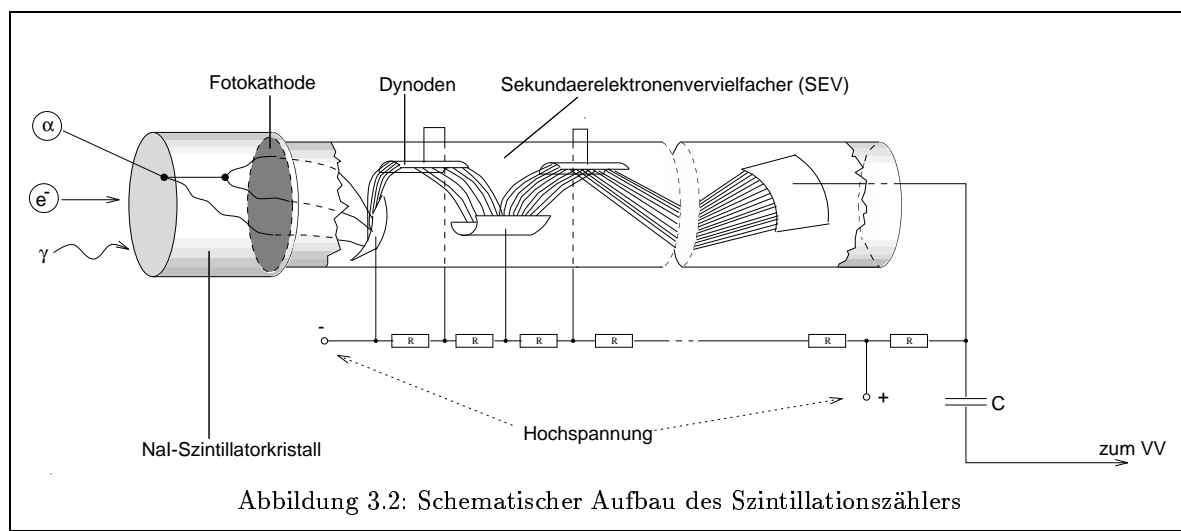


Abb. 3.1: Niveaus der verunreinigten Kristalle

Häufig benutzte Kristalle sind die folgenden: Natriumiodid NaI, verunreinigt mit ungefähr 1% Thallium Tl, Cäsiumiodid CsI, ebenfalls mit circa 1% Thallium Verunreinigung und Zinksulfid ZnS, verunreinigt mit Silber Ag. In jedem dieser Kristalle ist ein schweres Element mit hoher Kernladungszahl Z beinhaltet, damit insbesondere der Photoeffekt einen hohen Wirkungsquerschnitt hat (der ging ja mit Z^5). Trifft nun ein von den zu detektierenden Teilchen ausgeschlagenes, schnelles Elektron auf den Kristall, so hebt es viele Male ein gebundenes Elektron aus dem Valenzband in das Leitungsband (zum Bändermodell: vgl. Versuch 17 [FP-17]). Der Bandabstand beträgt ungefähr 4 bis 10 eV. Das Zurückfallen des Elektrons in ein Loch findet vorzugsweise an Defekten im Kristall oder an Fremdatomen statt. Damit dies kontrolliert und schnell vonstatten geht, und zusätzlich noch in einem geeigneten Frequenzbereich, sind die Kristalle gezielt verunreinigt. Wie in obenstehender Zeichnung zu erkennen, liegen an den Stellen der Fremdatome verschobene Bandniveaus, sodaß bei der Rückkehr der Elektronen ins Valenzband über die Fremdatomniveaus hauptsächlich Lichtquanten der Energie 3 eV, entsprechend einer Wellenlänge von ungefähr



415 nm, ausgestrahlt werden (für NaI(Tl)). Da die Fremdatome statistisch verunreinigen, streuen die Energien der zugehörigen Niveaus und so auch die ausgestrahlten Energien der Lichtquanten und man erhält ein kontinuierliches Spektrum mit Maximum bei 415 nm. Durch die Art der Fremdatome kann die ausgestrahlte Wellenlänge sehr gut kontrolliert und auf die nachfolgende Fotokathode angepaßt werden. So sendet CsI(Na) blaues Licht aus, während CsI(Tl) rotes abstrahlt.

Im Gegensatz dazu senden die organischen Kristalle über molekulare Anregungen Licht aus, was deutlich schneller ist. Wir wollen darauf nicht näher eingehen.

Der Szintillatorkristall ist an drei Wänden in Magnesium- oder Aluminiumoxid (MnO oder Al_2O_3) eingeschlossen; Materialien, die sehr gut reflektieren. So geht kein Lichtquant verloren. An der vierten Wand befindet sich ein Lichtleiter aus Silikonöl oder Plexiglas, der den Brechungsindex zwischen dem Kristall und der nachfolgenden Fotokathode anpaßt. Fotokathoden, die bei 415 nm empfindlich sind, bestehen z. B. aus SbCs. Die an der Fotokathode durch die Lichtquanten ausgeschlagenen Elektronen treten nun in den eigentlichen SEV ein, den wir nun beschreiben wollen.

Ein SEV besteht aus der Fotokathode, mehreren sogenannten Dynoden und einer Anode (die in unserer Abb. 3.2 als letzte Dynode gezeichnet ist, obwohl die Anode so gebaut ist, daß aus ihr keine Sekundärelektronen austreten). Aus der Fotokathode treten die durch die Lichtquanten ausgelösten Elektronen aus. An der Anode werden die verstärkten Elektronen gesammelt und als Ladungsimpuls, bzw. an einem Widerstand zum Spannungsimpuls umgewandelt, an die nachfolgende Elektronik zur Auswertung weitergeleitet. Die am SEV anliegende Hochspannung wird nun durch einen Spannungsteiler gleichmäßig auf die Dynoden verteilt, so daß zwischen je zwei Dynoden ungefähr 100 V anliegen. Was sind nun eigentlich *Dynoden*? Dynoden sind spezielle Elektroden, die die Elektronen der vorhergehenden Dynode sammeln (durch die 100 V Potentialdifferenz) und dann durch das Auftreffen der Elektronen für jedes Elektron mit guter Statistik ca. A Sekundärelektronen abgeben. A liegt i. a. im Bereich zwischen 3 und 10. Da mehrere Dynoden hintereinander geschaltet sind, potenziert sich A und es ergibt sich für die Zahl der an der Anode gesammelten Elektronen:

$$N = C \cdot N_{\text{Lichtquanten}} \cdot A^n \quad (3.1)$$

Dabei ist C eine Konstante der Fotokathode, $N_{\text{Lichtquanten}}$ die Zahl der an der Fotokathode angekommenen Lichtquanten und n die Zahl der Dynoden im SEV. Um Dunkelströme zu verhindern (also Signale ohne zu detektierendes Teilchen), sollte man den Zähler kühlen.

Alle Effekte im Szintillatorkristall sind statistisch zur Energie der eintreffenden Teilchen proportional.

Dasselbe gilt für die Phänomene in der Fotokathode und im SEV. Das Ausgangssignal des Szintillationszählers ist also zur Energie der detektierten Teilchen proportional. Leider ist die Lichtausbeute eines Szintillatorkristalls nicht allzu groß. Sie beträgt für NaI(Tl) ungefähr 11%, für Anthrazen ca. 5% und für sogenannte Plastikszintillatoren ungefähr 2%. Das bedeutet, daß z. B. ein 100 keV- γ -Quant in einem NaI(Tl)-Kristall circa 3500 Lichtquanten à 3 eV erzeugt. Diese können nun, je nach Fotokathode, ungefähr 180 Primärelektronen in den SEV schicken. Pro Primärelektron benötigt man also 550 eV (i. a. 300 bis 1000 eV) der Energie des zu detektierenden Teilchens. Ein Teilchen erzeugt also relativ wenige Elektronen (z. B. im Vergleich zu einem Halbleiterdetektor). Diese Erzeugung hängt aber von poisson-verteilten (vgl. Versuch 2) statistischen Effekten ab, deren Streuung jeweils mit \sqrt{N} geht. Aufgrund der kleinen Teilchenzahlen ist die Energieauflösung eines Szintillationszählers also nicht so gut. Die Energieauflösung ist dabei $\frac{\Delta E}{E}$, wobei ΔE für FWHM steht. FWHM bedeutet „Full width, half maximum“, also muß man bei der gemessenen count- E -Verteilung die volle Breite der Verteilung an dem halben count-Wert von E bestimmen und in die Gleichung für die Energieauflösung einsetzen.

Natürlich haben Szintillatoren auch Vorteile: So kann man ihr empfindliches Volumen, in dem sie Teilchen detektieren können, verhältnismäßig groß machen. Außerdem besitzen sie, insbesondere die organischen Szintillatoren und die Plastikszintillatoren, eine sehr gute Zeitauflösung, also eine kleine Totzeit. Insbesondere zum Zählen (wenn es also auf die Energie nicht so ankommt) ist dies eine wichtige Eigenschaft. Typische Abklingzeiten sind für NaI(Tl) 250 nsec, für Anthrazen 36 nsec und für Plastikszintillatoren 3 bis 6 nsec.

3.2 Andere Detektoren und Elektronik

In diesem Abschnitt erwähnen wir lediglich den Halbleiterdetektor und die Elektronik; wir haben diese Dinge bereits in anderen Versuchen ausführlich beschrieben. Wir verweisen hier im wesentlichen auf diese Versuche.

Der Halbleiterdetektor

Ein Halbleiterdetektor ist im wesentlichen eine in Sperrichtung geschaltete Diode mit einer sehr großen Sperrschicht oder verarmten Zone. Elektronen, die durch detektierbare Teilchen in der verarmten Zone gebildet werden, führen direkt zu einem Stromstoß. Durch diesen direkteren Nachweis entstehen deutlich mehr Elektronen als beim Szintillationszähler. Somit ist die statistische Schwankung geringer, also hat der Halbleiterdetektor eine extrem bessere Energieauflösung. Dafür ist es mit ihm schwieriger, ein großes Volumen bereitzustellen, in dem Teilchen detektiert werden können. Genauer sind wir auf diesen Detektor in Versuch 17 [FP-17] eingegangen, der ja auch Ge(Li)- γ -Spektroskopie heißt.

Verstärker

Auf die Verstärker sind wir genauer ebenfalls in Versuch 17 [FP-17] eingegangen. Hier also in Kurzfassung: Der *Vorverstärker* hat zum einen die wichtige Aufgabe eines Impedanzwandlers, zum anderen integriert er die ankommenden, wegen der endlichen Sammelzeit zeitlich verschmierten Ladungsstöße. Der *Hauptverstärker* soll neben der Verstärkung den Signal-Rausch-Abstand verbessern. Er ist dazu im Prinzip ein Bandpaß, der nur die Frequenzen, die zur Sammelzeit des Detektors passen, herausfiltert. Ein *Einkanaldiskriminator*, kurz EKD, ist ein Gerät, das so eingestellt werden kann, daß es nur dann einem Zähler ein logisches Signal weitergibt, wenn die vom Hauptverstärker gelieferte Spannungsamplitude innerhalb eines wählbaren Intervalls liegt. Der *Vielkanalanalysator*, kurz VKA, besteht im Prinzip aus vielen EKD's, deren Schwellen so eingestellt sind, daß gleichzeitig das gesamte Spektrum untersucht werden kann.

3.3 Das γ -Spektrum

Zunächst mal haben wir ein Beispielspektrum für γ -Strahlung von 2 MeV gezeichnet. Alle Peaks haben eine endliche Breite aufgrund der von Null verschiedenen Energieauflösungen der Detektoren.

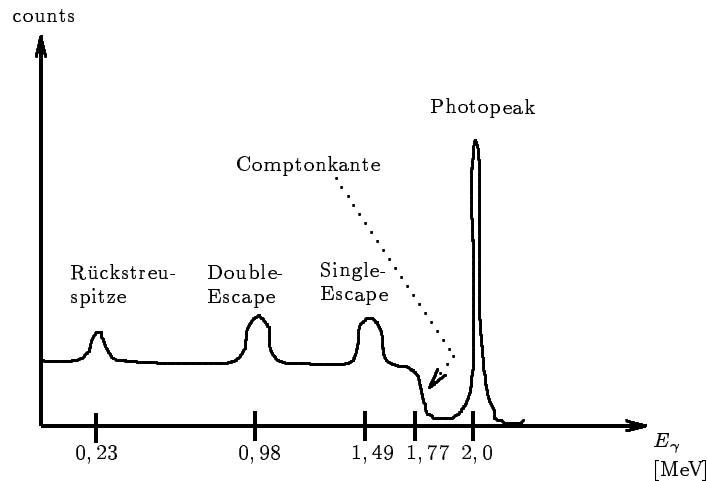


Abbildung 3.3: Beispiel- γ -Spektrum

Von den Detektoren werden immer nur Elektronen detektiert. Wir haben schon bei der Beschreibung der Reaktionen der γ -Quanten mit Materie jeweils beschrieben, woher und wie diese Elektronen entstehen. Wir beschreiben nun die verschiedenen Peaks:

1. *Full-energy-Peak*: Ein count in diesem Peak tritt auf, wenn das γ -Quant vollständig innerhalb des Detektors absorbiert wurde. Dies kann durch mehrere, durchaus verschiedene Prozesse hintereinander geschehen, bei denen jeweils nur ein Teil der γ -Energie absorbiert wird (z. B. Comptoneffekt), oder auf einmal durch den Photoeffekt. Auf jeden Fall verbleiben alle entstehenden Elektronen und (evtl.) γ -Quanten innerhalb des Detektors, bis sie registriert wurden. Da dem Photoeffekt zum einen die tragende Rolle zukommt, aber auch die Wirkung der aufgeteilten Prozesse als ein Photoeffekt betrachtet werden kann, nennt man den Full-energy-Peak auch kurz *Photo-Peak*.
2. *Single-Escape-Peak*: Dies ist ein Effekt der Paarbildung. Wir hatten dort festgestellt, daß die im Vergleich zum γ -Quant um 1,022 MeV niedrigere kinetische Energie der Elektronen und Positronen wie gewöhnlich detektiert wird. Die fehlenden 1,022 MeV werden beim Zerstrahlen des Positrons als zwei γ -Quanten à 511 keV wieder frei. Verläßt nun *eines* dieser Röntgenquanten den Detektor, ohne detektiert zu werden, so registriert man eine Energie, die um 511 keV geringer ist als der Photo-Peak. Diesen so entstehenden Peak nennt man *Single-Escape-Peak*.
3. *Double-Escape-Peak*: In diesem Fall verlassen beide 511 keV-Röntgenquanten aus dem Paarbildungsprozeß den Detektor, ohne registriert zu werden. Man erhält also einen Peak, dessen Energie um 1,022 MeV niedriger liegt als die des Photo-Peaks. Man nennt diesen Peak, weil halt beide Röntgenquanten entkommen, *Double-Escape-Peak*.
4. *Compton-Kante*: Beim Compton-Effekt besitzen die gestreuten Photonen eine geringere Energie als die ankommenden γ -Quanten. Wenn die gestreuten Photonen den Detektor unregistriert verlassen, so registriert man eine zu geringe Energie. Wir haben berechnet, daß bei hoher Energie der einfallenden γ -Quanten die gestreuten Photonen mindestens die Energie 256 keV besitzen. Es

kommen also gestreute Photonen aller Energien zwischen 256 keV und der einfallenden γ -Energie vor. Wenn diese Photonen den Detektor verlassen, so registrieren wir also Energien zwischen 0 und $E_{\text{Kante}} := E_\gamma - 256 \text{ keV}$. In diesem Energiebereich bilden die von der Comptonstreuung bewirkten counts also einen Untergrund, der bei E_{Kante} aufhört. Dieses Abfallen der Compton-Untergrundstrahlung bei E_{Kante} nennt man *Compton-Kante*. Da mehrere Comptonstreuungen auftreten können, tritt die Comptonkante nicht völlig scharf auf.

5. *Rückstreu-Spitze*: Dieser Peak kommt folgendermaßen zustande: Einige γ -Quanten reagieren überhaupt nicht im Detektor. Sie fliegen durch den Detektor durch und können nun mit Materialien *hinter* dem Detektor reagieren. Unter anderem kann dort auch der Compton-Effekt stattfinden mit einem Streuwinkel von $\theta = \pi$, wir haben dann also eine Rück-Streuung im Material hinter dem Detektor. Die Energie der gestreuten Photonen beträgt 256 keV. Da sie mit $\theta = \pi$ zurückgestreut wurden, treten sie wieder in den Detektor ein. Dort werden also γ -Quanten der Energie 256 keV registriert. Aufgrund der beschriebenen Herkunft nennt man den zugehörigen Peak *Rückstreupeak*.

Und nun wollen wir das auch in praxi sehen und Kerne detektieren.

4. Die Meßdaten

Wir führen hier die handschriftlichen Messungen auf, die wir zu diesem Versuch aufgenommen haben. Die Spektren, die wir mit dem VKA aufgenommen haben, werden wir erst in der Auswertung an den geeigneten Stellen plotten. Also hier die handschriftlichen Tabellen:

4.1 Impulsanstiegs- und -abfallzeiten

In dem ersten Versuchsteil befassen wir uns mit den verschiedenen Impulsformen vor und nach dem Vorverstärker. Die Impulse wurden von dem Sekundärelektronenvervielfacher SEV nach dem Szintillator geliefert und auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht. Der SEV detektierte ^{137}Cs .

Vor dem Vorverstärker maßen wir:

	Beginn [Einheit]	\pm Fehler \pm [Einheit]	Ende [Einheit]	\pm Fehler \pm [Einheit]	Einheit \triangleq
Anstiegszeit	0	$\pm 0,2$	4,2	$\pm 0,8$	$0,2 \mu\text{sec}$
Abfallzeit	0	$\pm 0,2$	3,8	$\pm 0,4$	$10 \mu\text{sec}$
Peakhöhe			2,8	$\pm 0,4$	50 mV

Nach dem Vorverstärker führten wir zwei Messungen durch: bei einer war nur das Oszilloskop an dem Vorverstärker angeschlossen, bei der anderen war die gesamte Schaltung aufgebaut und das Oszilloskop über eine Verzweigung angeschlossen. Das Meßergebnis ohne Apparatur:

	Beginn [Einheit]	\pm Fehler \pm [Einheit]	Ende [Einheit]	\pm Fehler \pm [Einheit]	Einheit \triangleq
Anstiegszeit	0	$\pm 0,2$	4,0	$\pm 0,6$	$0,2 \mu\text{sec}$
Abfallzeit	0	$\pm 0,2$	8	$\pm 0,6$	$5 \mu\text{sec}$
Peakhöhe			2,8	$\pm 0,4$	100 mV

Und nun mit der Apparatur hintendran:

	Beginn [Einheit]	\pm Fehler \pm [Einheit]	Ende [Einheit]	\pm Fehler \pm [Einheit]	Einheit \triangleq
Anstiegszeit	0	$\pm 0,2$	4,2	$\pm 0,8$	$0,2 \mu\text{sec}$
Abfallzeit	0	$\pm 0,2$	3,8	$\pm 0,4$	$10 \mu\text{sec}$
Peakhöhe			2,6	$\pm 0,4$	50 mV

4.2 Verstärkung des SEV

In der zweiten Messung wollen wir etwas über das Verstärkungsverhalten des Sekundärelektronenvervielfachers SEV herausfinden. Wir veränderten dazu die Hochspannung zwischen Anfang und Ende des

SEV und maßen die Impulshöhe des SEV hinter dem Hauptverstärker. Aus der Abhängigkeit der Impulshöhe von der Hochspannung werden wir die Zahl der Dynoden des SEV bestimmen können. Als Quelle für die Impulse diente wieder das ^{137}Cs .

Die folgende Tabelle enthält unsere Meßwerte und die Umrechnung der gemessenen Oszilloskopabstände in mV. Der Fehler der gemessenen Hochspannung betrug 20 V, der Fehler beim Ablesen der Impulse war jeweils 0,2 Einheiten.

Hochspannung [V]	Impuls-Spannung [Einheit]	Einheit [mV]	Impuls-Spannung [mV]	±Fehler ±[mV]
800	1,1	20	22	±4
850	1,8	20	36	±4
900	3,0	20	60	±4
950	2,0	50	100	±10
1000	3,0	50	150	±10
1050	4,2	50	210	±10
1100	5,0	50	250	±10
1150	3,6	100	360	±20
1200	5,2	100	520	±20
1250	3,8	200	760	±40
1300	5,0	200	1000	±40
1350	7,0	200	1400	±40
1400	3,6	500	1800	±100
1450	4,8	500	2400	±100
1500	6,2	500	3100	±100

4.3 Linearer Absorptionskoeffizient

Im letzten Versuchsteil wollen wir den linearen Absorptionskoeffizienten von Aluminium bestimmen. Wir hatten dazu 5 Aluminiumplatten zur Verfügung mit den folgenden Dicken:

Dicke Platte 1: 4,96 mm,
 Dicke Platte 2: 20,06 mm,
 Dicke Platte 3: 20,06 mm,
 Dicke Platte 4: 20,06 mm,
 Dicke Platte 5: 9,97 mm.

Wir maßen jeweils für 120sec das Präparat ^{137}Cs , das in festem Abstand vom Detektor angebracht war. Für verschiedene Kombinationen der Platten bestimmten wir jeweils mittels dem Peakreport des Programms *nucleus* die Fläche unter dem Photopeak, der in dem Feld *net integral* angegeben wird. Dies ist ein Maß für die Intensität der ankommenden γ -Strahlung. Aus der Abhängigkeit der Intensität von der Dicke der abschirmenden Platten können wir dann den Absorptionskoeffizienten bestimmen.

Wir wollen kurz darauf eingehen, warum gerade das *net integral* die geeignete Größe zur Bestimmung der Intensität ist: In Versuch [FP-7] stellten wir fest, daß das Verhältnis zwischen abgestrahlten γ -Quanten, also der Intensität der γ -Quelle, und den im Photopeak registrierten counts durch zwei Größen gegeben ist: der Efficiency und der Peak-to-total-ratio. Die Efficiency bestimmt, wieviele der ankommenden γ -Quanten im Detektor überhaupt eine Reaktion auslösen; die Peak-to-total-ratio gibt an, wieviele der überhaupt registrierten Quanten mit der vollen Energie detektiert werden. Bei einer festen zu detektierenden Energie — wie bei uns die ^{137}Cs -Linie bei 662keV — sind die beiden Größen natürlich feste Zahlen und daher sind die counts des Photopeaks ein Maß für die Intensität der Strahlung. Nun reicht es natürlich nicht einfach, alle counts zwischen Anfang und Ende des Peaks zu zählen,

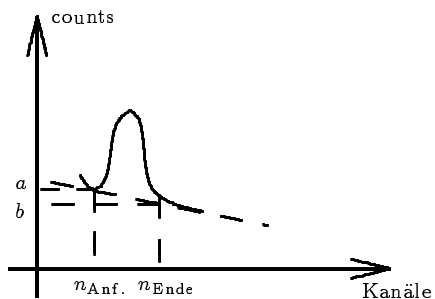


Abb. 4.1: Korrektur der Gesamtcounts auf Photopeak-counts ohne nucleus

weil auch noch der Untergrund Zählungen im VKA hervorruft. Das Programm `nucleus` gibt nun in der Rubrik `net integral` die Zahl der counts im Photopeak an, die mittels eines Algorithmus von den Hintergrundzählungen befreit ist. Ohne `nucleus` müßten wir eine solche Bereinigung per Hand durchführen, wie in Abbildung 4.1 angedeutet. Mit den Bezeichnungen aus der Abbildung würden wir dann

$$\text{Net integral} = \text{Gross int} - \frac{1}{2} \cdot (n_{\text{Ende}} - n_{\text{Anf.}}) \cdot (a + b)$$

rechnen, wobei das `gross int` die Gesamtzahl der counts unter dem Peak ist.

In der folgenden Tabelle sind die verwendeten Platten angegeben, ihre Gesamtdicke und das `net integral`, unser Maß für die Intensität:

Platte					Gesamtdicke [mm]	Net integral
1	2	3	4	5		
•	•	•	•	•	75,11	5632
		•	•	•	70,15	6467
•	•	•	•		65,14	7137
•	•	•		•	55,05	8911
		•	•		60,18	7779
•	•			•	34,99	13531
		•	•	•	50,09	9633
•	•	•			45,08	10928
		•	•		40,12	12106
		•		•	30,03	14962
•	•				25,02	16764
•				•	14,93	20957
	•				20,06	18390
				•	9,97	22936
•					4,96	25457

5. Auswertung

5.1 Impulsanstiegs- und -abfallzeiten

Als erstes untersuchen wir die Signale vor und nach dem Vorverstärker. Dazu rechnen wir zunächst unsere am Oszilloskop gemessenen Werte (siehe Seite 22) in Zeiten und Spannungen um (für die Fehler nehmen wir nach Gauß natürlich die Wurzel aus der Quadratsumme) und erhalten:

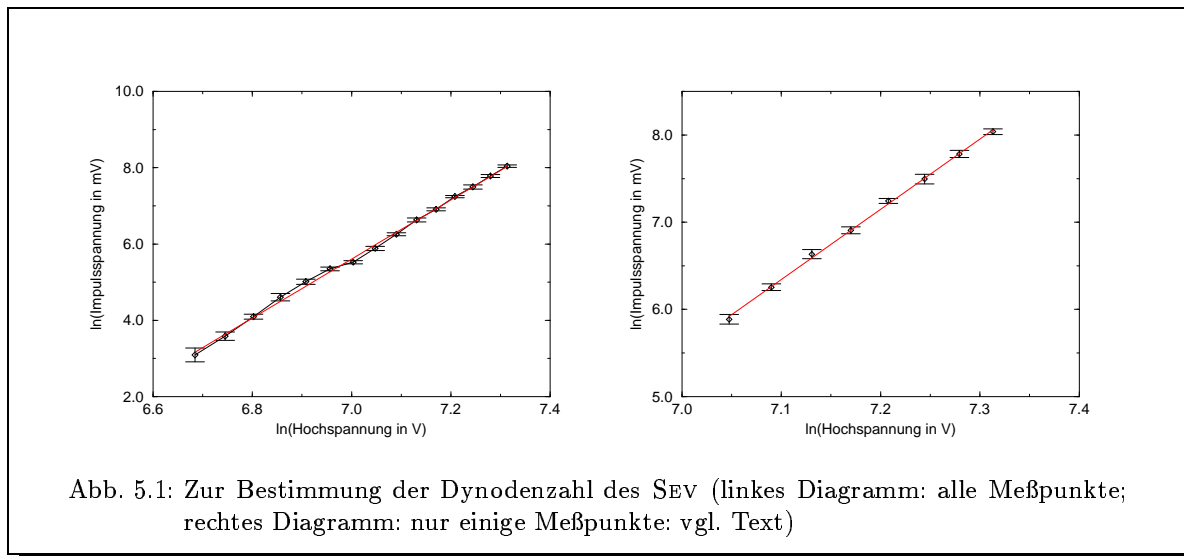
	vor dem VV	nach dem VV, ohne Apparatur	nach dem VV, mit Apparatur
Anstiegszeit [μsec]	$0,84 \pm 0,165$	$0,8 \pm 0,126$	$0,84 \pm 0,165$
Abfallzeit [μsec]	$38 \pm 4,5$	$40 \pm 3,2$	$38 \pm 4,5$
Peakhöhe [mV]	140 ± 20	280 ± 40	130 ± 20

Wir sehen also, daß die Anstiegs-, die Abfallzeiten und die Peakhöhen vor und nach dem Vorverstärker bei vollem Aufbau der restlichen Detektorapparatur im wesentlichen nicht verändert sind. Bei uns hat der Vorverstärker also als wesentliche Aufgabe die Impedanzwandlung, d. h. die Anpassung des hohen Ausgangswiderstands des Sekundärelektronenvervielfachers SEV an den niedrigen Eingangswiderstand des nachfolgenden Hauptverstärkers. Dieser und die restliche Elektronik (einschließlich der Kabel; auch zum Hauptverstärker hin) sind meist auf Kontaktwiderstände von 50Ω eingestellt. Wegen der Kabelwiderstände befindet sich der Vorverstärker direkt hinter dem SEV des Detektors. Hingegen braucht unser Vorverstärker nicht mehr die Aufgabe übernehmen, lange Sammelzeiten mehrerer Ladungsimpulse durch ein zu detektierendes Teilchen mittels Integration zu einem Impuls zusammenzufassen; bei uns sind bereits die vom SEV gelieferten Signale eindeutige einzelne, energieproportionale Impulse, die zu einem einfallenden γ -Quant gehören.

Anhand des Vergleichs der Ausgangsimpulse mit und ohne Aufbau der restlichen Auswertearratur erkennen wir, daß der Vorverstärker ohne Belastung auch leicht die Eingangssignale verstärkt. Da die eigentliche Verstärkung (unter der Beachtung von Signal-Rausch-Abständen, etc.) vom Hauptverstärker übernommen wird, ist diese leichte Verstärkung aber sowieso nur nötig, damit mit Belastung durch die Elektronik die Spannung am Vorverstärker nicht abfällt. Der Vorverstärker verstärkt also nur so stark, daß die Verluste durch die Impedanzwandlung ausgeglichen sind. Insgesamt bestätigen sich unsere Erwartungen, die wir ja in Versuch 17 ([FP-17]) ausführlich dargelegt haben (weil wir dort auch noch andere Messungen an den Verstärkern durchführten).

5.2 Dynoden und Verstärkung des SEV

Nun wollen wir die Zahl der Dynoden des Sekundärelektronenvervielfachers SEV bestimmen. Wir nutzen dazu Gleichung (3.1). Die Zahl der Elektronen am Ende des SEV N ist zur Ausgangsspannung des



Hauptverstärkers U_{HV} proportional. Andererseits ist der Faktor A , der ja angibt, wieviel mehr Elektronen die nächste Dynode erreichen im Vergleich zu denen, die die letzte verlassen haben, proportional zur am SEV anliegenden Hochspannung U_{HS} . Also folgt aus (3.1) mit einer Konstanten K :

$$U_{HV} = K \cdot (U_{HS})^n .$$

Die Zahl der Dynoden n können wir nun gut bestimmen, wenn wir diese Gleichung logarithmieren:

$$\ln(U_{HV}) = \ln(K) + n \cdot \ln(U_{HS}) .$$

Diese erscheint nämlich als Steigung in einem $\ln(U_{HV})$ - $\ln(U_{HS})$ -Diagramm. Wir plotten also unsere Meßwerte von Seite 23 doppellogarithmiert im linken Diagramm der Abbildung 5.1. Man erkennt in der Mitte des Graphen einen Sprung der Meßwerte, während vorher und hinterher lineare Bereiche deutlich zu erkennen sind. Ein Vergleich mit den Meßdaten von Seite 4.2 ergibt, daß dieser Sprung gerade beim Umschalten des Oszilloskop-Bereiches von 50 mV auf 100 mV auftritt. Die lineare Regression ergibt in diesem Graphen folgende Gerade:

$$\ln(U_{HV}[mV]) = (7,75 \pm 0,094) \cdot \ln(U_{HS}[V]) - (48,65 \pm 0,66) .$$

Innerhalb der Fehlergrenzen befindet sich keine natürliche Zahl. Das Ergebnis der Regression ist also nicht allzu ideal, auch wenn man bereits hier 8 Dynoden vermutet. Das ungünstige Ergebnis liegt offensichtlich an dem Sprung; Geraden in den beiden linearen Bereichen wären steiler. Die Meßwerte vor dem Sprung wurden mit Einstellungen von 50 mV oder weniger auf dem Oszilloskop gemessen. Bei Bereichsumschaltungen am Oszilloskop können sich — insbesondere bei den beiden kleinsten Einstellmöglichkeiten 20 mV und 50 mV — durch Änderung der Vorwiderstände Ungenauigkeiten der Meßergebnisse durch Einflüsse des Meßgerätes entwickeln. Bei uns scheint dies merklich aufgetreten zu sein. Da die kleinen Meßbereiche am Rande der Einstellmöglichkeiten des Oszilloskops liegen, gehen wir davon aus, daß diese die ungenaueren sind. Neben der Oszilloskopeinstellung kann es noch sein, daß sich durch die Geometrie oder Materialeigenschaften des SEV ein solcher Sprung einstellt, indem sich das A nicht allein durch Hochdrehen der Hochspannung U_{HS} ändert. Alles in allem haben wir uns entschieden, die ersten 7 Meßwerte „wegzuschmeißen“ und dann nochmal eine lineare Regression durchzuführen. Graphisch haben wir dies rechts in Abbildung 5.1 dargestellt; es ergibt sich nun die Gerade:

$$\ln(U_{HV}[mV]) = (8,062 \pm 0,112) \cdot \ln(U_{HS}[V]) - (50,9 \pm 0,81) .$$

In der Tat ergibt sich nun ein viel besseres Ergebnis: Innerhalb der Fehlergrenzen liegt die natürliche Zahl 8. Also hat unser SEV 8 Dynoden. Sehr schön, daß wir das so genau herausfinden konnten.

5.3 Eichungen

Wir plotten hier nochmal die Zerfallsschemata aus der Anleitung:

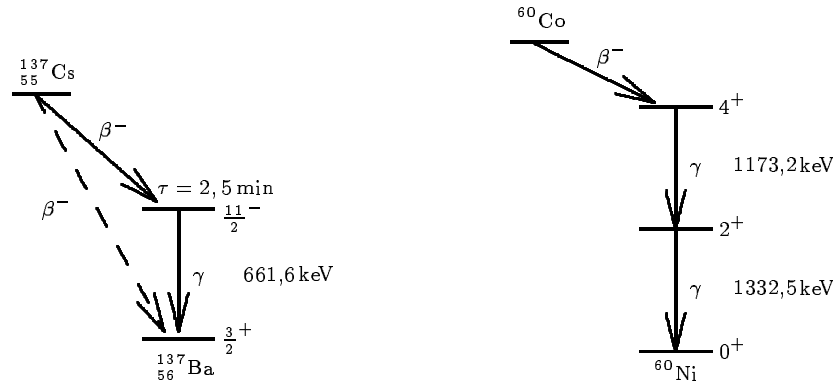


Abbildung 5.2: Übergänge in den Präparaten. Links: ^{137}Cs ; Rechts: ^{60}Co .

Aus diesen Schemata liest man nun die entscheidenden theoretischen Energien der Photo-Peaks, der Comptonkanten und der Rückstreu-Peaks ab. Durch Vergleich mit den mittels Peakreport des Programmes nucleus oder graphisch ermittelten Kanälen kann man dann eine Energieeichung des Detektors auf unserem VKA durchführen.

Die Photo-Peak-Energien sind natürlich direkt die in den obigen Schemata eingezeichneten Energien der γ -Zerfälle. Die Energien der Rückstreu-Strahlungen¹ berechnen sich über Gleichung (2.4). Die Lage der Comptonkante ergibt sich aus der Differenz von Photopeak-Energie und Rückstreu-Energie, da ja ein count an der Comptonkante genau dann eintritt, wenn ein (jetzt im Detektor) rückgestreutes γ -Quant unregistriert den Detektor verläßt.

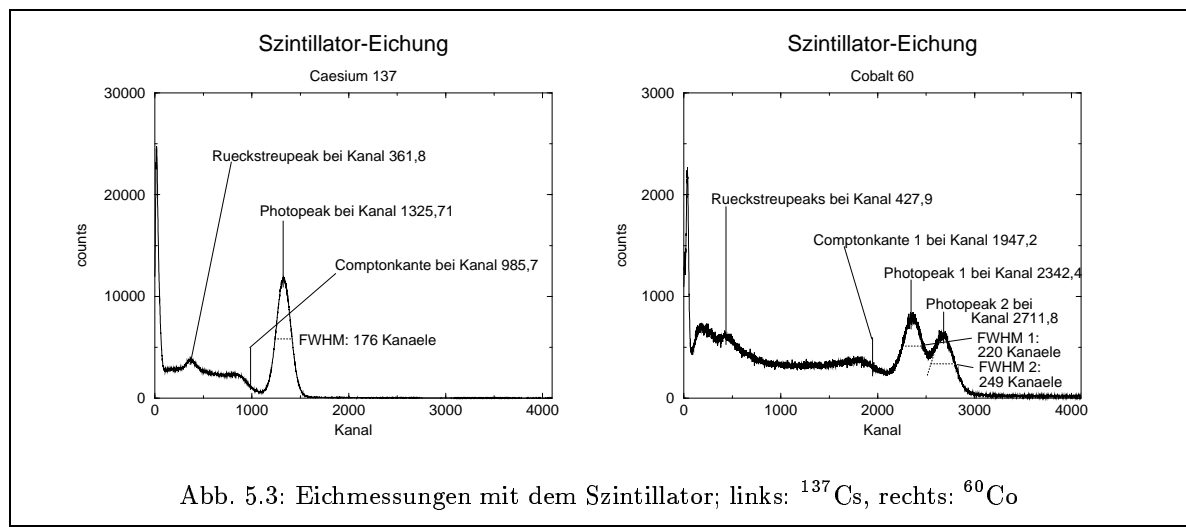
Es ergeben sich also folgende Energien:

Zerfall	Stelle im Spektrum	Energie
hochenergetischer Zerfall des ^{60}Co :	Photopeak	1332,5 keV
	Rückstreupeak	214,4 keV
	Comptonkante	1118,1 keV
niederenergetischer Zerfall des ^{60}Co :	Photopeak	1173,2 keV
	Rückstreupeak	209,8 keV
	Comptonkante	963,4 keV
Zerfall des ^{137}Cs :	Photopeak	661,6 keV
	Rückstreupeak	184,3 keV
	Comptonkante	477,3 keV

5.3.1 Eichung des Szintillationspektrometers

Die mit dem Szintillationsdetektor in 300 sec aufgenommenen Spektren von ^{137}Cs und ^{60}Co haben wir in Abbildung 5.3 geplottet. Wir haben graphisch (die Photopeaks sind mittels Peakreport des Programms nucleus gegengecheckt) folgende Kanalwerte ermittelt:

¹In der Vorbereitung hatten wir für hohe Energien der einfallenden Strahlung die Lage der Rückstreu-Peaks auf 256 keV genähert. Da wir hier aber auch verhältnismäßig niedrige γ -Energien vorliegen haben, rechnen wir hier genau.

Abb. 5.3: Eichmessungen mit dem Szintillator; links: ^{137}Cs , rechts: ^{60}Co

Zerfall	Stelle im Spektrum	Kanal	Kommentar
hochenergetischer Zerfall des ^{60}Co :	Photopeak	2711,8	
	Rückstreupeak	427,9	
	Comptonkante		nicht erkennbar
niederenergetischer Zerfall des ^{60}Co :	Photopeak	2342,4	
	Rückstreupeak		vermischt sich mit hochenergetischem Rückstreupeak
	Comptonkante	1947,2	
Zerfall des ^{137}Cs :	Photopeak	1325,7	
	Rückstreupeak	361,8	
	Comptonkante	985,7	

Mit diesen führen wir jetzt die Eichung durch. Dabei haben wir die Energie der Rückstreupeaks des Kobalts zu 212,1 keV gemittelt, da diese im gemessenen Spektrum aufgrund der nicht so tollen Energieauflösung eines Szintillationsdetektors nicht getrennt aufgenommen wurden. Die Eichgerade ist in Abbildung 5.4 in die Meßpunkte eingezeichnet; numerisch ergibt sich:

$$E = (0,495 \pm 0,0042) \text{ keV} \cdot K + (1,1 \pm 7,1) .$$

Die Eichung ist ziemlich genau. Zum einen ist der Fehler der Proportionalitätskonstanten sehr gering (und in der Abbildung 5.4 sieht man ja auch, daß die Punkte kaum von der Geraden abweichen), zum anderen ist bei Kanal Null ziemlich genau die Energie Null. Das könnten wir auch als Nachteil interpretieren, da wir hierdurch auch die geringen Untergrundschwankungen (z. B. das thermische Rauschen der Elektronik) direkt im VKA sehen können. Wir wissen jetzt also, woher die hohen Peaks direkt am linken Rand des VKA's kommen; stören tun sie unsere Messung aber nicht weiter, da sie ja auf den linken Rand des VKA's beschränkt sind.

Energieabhängigkeit der FWHM

Wir wollen nun die Energieauflösung des Szintillationsdetektors näher untersuchen. Wir haben schon auf Seite 19 angedeutet, daß $\frac{\Delta E}{E} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$ gilt, wenn man beachtet, daß die Zahl der counts N ja zur Energie E proportional ist. Da die Bildung der Photoelektronen, die wir ja mit den counts zählen,

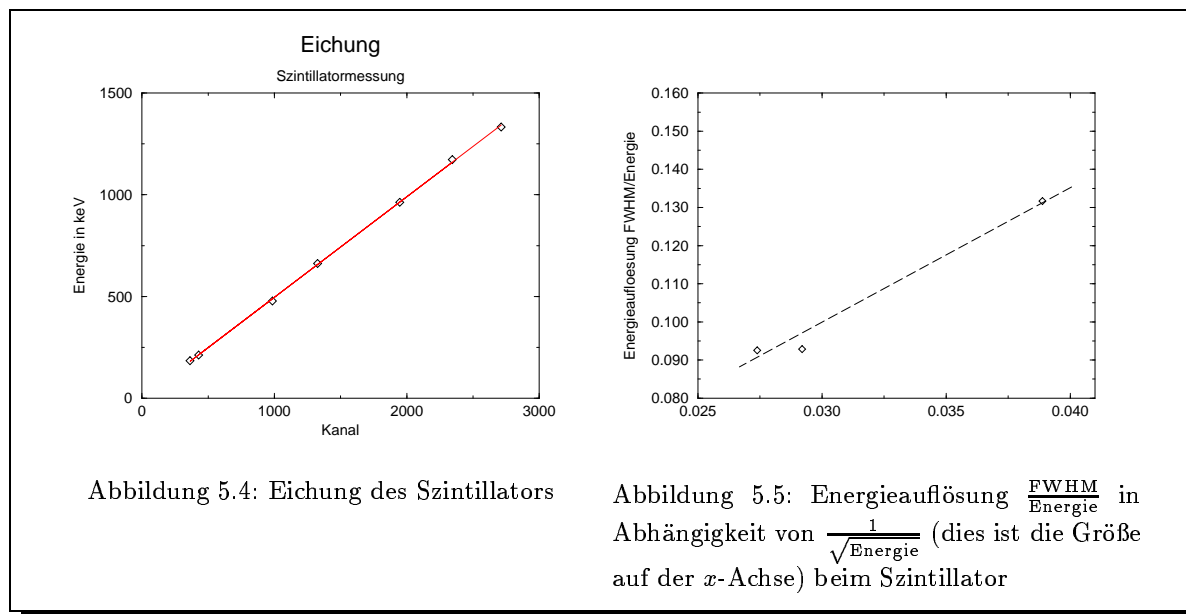


Abbildung 5.4: Eichung des Szintillators

Abbildung 5.5: Energieauflösung $\frac{FWHM}{Energie}$ in Abhängigkeit von $\frac{1}{\sqrt{Energie}}$ (dies ist die Größe auf der x-Achse) beim Szintillator

poissonverteilt ist, gilt nämlich für die Streuung der counts $\sigma = \sqrt{N} \propto \sqrt{E}$. Nun ist das FWHM ΔE proportional zur Streuung σ und daher gilt halt nun:

$$\frac{\Delta E}{E} \propto \frac{\sqrt{E}}{E} \propto \frac{1}{\sqrt{E}} .$$

Dies überprüfen wir nun anhand der Photopeaks. Wir haben in Abbildung 5.3 die FWHM's graphisch ermittelt. Wir rechnen die Kanäle in Energien um und erhalten so:

Präparat	Energie des Peaks [keV]	FWHM in Kanälen	FWHM in keV	$\frac{FWHM}{Energie}$ [%]	$\frac{1}{\sqrt{Energie}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{keV}}\right]$	$\frac{FWHM}{\sqrt{Energie}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{keV}}\right]$
^{137}Cs	661,6	176	87,12	13,168	0,0388779	3,387
^{60}Co	1173,2	220	108,9	9,2823	0,0291954	3,179
	1332,5	249	123,255	9,2499	0,027395	3,377

Aufgrund der theoretischen Proportionalität erwarten wir also einen konstanten Wert in der letzten Spalte der Tabelle und eine Gerade im $\frac{FWHM}{Energie} - \frac{1}{\sqrt{E}}$ -Diagramm, welches wir in Abbildung 5.5 geplottet haben. Wenn wir unsere drei Meßwerte in dieser Hinsicht überhaupt als relevant ansehen können, bestätigt sich unsere Erwartung. Nur der niederenergetische Peak des Kobalts fällt ein bißchen aus der idealen Erwartung, obwohl dies noch im Rahmen bleibt. Woran liegt dies? Wenn wir nochmal auf den Energiewert der Comptonkante des hochenergetischen Zerfalls sehen, so erkennen wir, daß diese noch innerhalb des Peaks des niederenergetischen Zerfalls liegt. Da wir aber den genauen Verlauf dieser Comptonkante nicht ablesen oder abschätzen können, verzerrt sie den niederenergetischen Peak. Daher ist das Ablesen des FWHM's des 1172 keV-Peaks systematisch belastet und die Abweichung erweist sich als erklärlich. Im Gegenteil ist sogar die extrem überzeugende Übereinstimmung des $\frac{FWHM}{\sqrt{E}}$ der beiden anderen Peaks eine gute Bestätigung unserer Theorie. Aber es sind eben auch nur zwei Werte.

5.3.2 Eichung des Halbleiterdetektors

Von nun an haben wir mit dem Halbleiterdetektor spektroskopiert. Als erstes müssen wir natürlich wieder eichen. Die in 300 sec aufgenommenen Spektren von ^{137}Cs und ^{60}Co haben wir nun in Abbildung

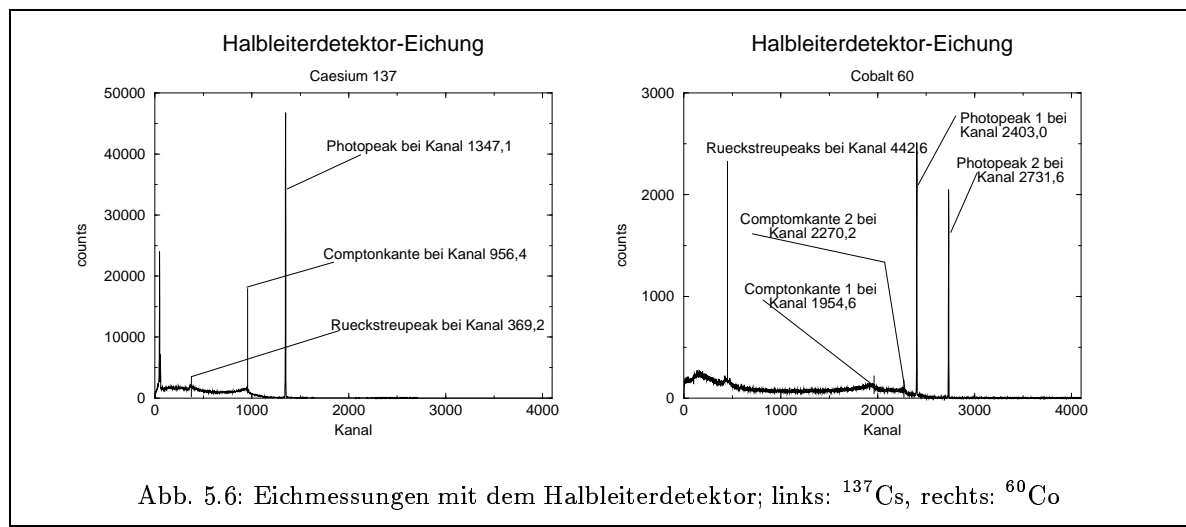


Abb. 5.6: Eichmessungen mit dem Halbleiterdetektor; links: ^{137}Cs , rechts: ^{60}Co

5.6 geplottet. Wir haben graphisch (erneut sind die Photopeaks mittels Peakreport des Programms nucleus gegengecheckt) folgende Kanalwerte ermittelt:

Zerfall	Stelle im Spektrum	Kanal	Kommentar
hochenergetischer Zerfall des ^{60}Co :	Photopeak	2731,6	jetzt sieht man sie, da bessere Energie- auflösung
	Rückstreupeak	442,6	
	Comptonkante	2270,2	
niederenergetischer Zerfall des ^{60}Co :	Photopeak	2403,0	vermischt sich mit hochenergetischem Rückstreupeak (immer noch)
	Rückstreupeak		
Zerfall des ^{137}Cs :	Comptonkante	1954,6	
	Photopeak	1347,1	
	Rückstreupeak	369,2	
	Comptonkante	956,4	

Mit diesen führen wir nun die Eichung des Halbleiterdetektors durch. Wiederum haben wir die Energie der Rückstreupeaks des Kobalts zu 212,1 keV gemittelt, denn offensichtlich hat nicht nur die Energieauflösung des Detektors einen Einfluß auf die Form dieser Peaks: Die Rückstreuung erfolgt nämlich nicht nur exakt unter dem Winkel π , sodaß der gemessene Wert um den idealen theoretischen Wert (den wir ja für den Winkel π berechnet haben) streut. Zumindest zeigen sich beide Rückstreupeaks als ein breiterer Peak, sodaß wir — wie gesagt — mitteln. So ergibt sich dann folgende Eichgerade

$$E = (0,4885 \pm 0,0024) \text{ keV} \cdot K + (3,54 \pm 4,31) ,$$

die wir in Abbildung 5.7 geplottet haben. Diese Eichung ist noch genauer als die Szintillatoreichung; die Energieauflösung des Halbleiterdetektors ist ja auch besser. Die Eichgerade liegt wieder toll in den Meßpunkten; ansonsten gilt das gleiche wie bei der Szintillatoreichung. Der Peak bei ungefähr 24 keV beim Cäsium ist allerdings wohl nicht nur durch Untergrundstrahlungen zu erklären, sondern

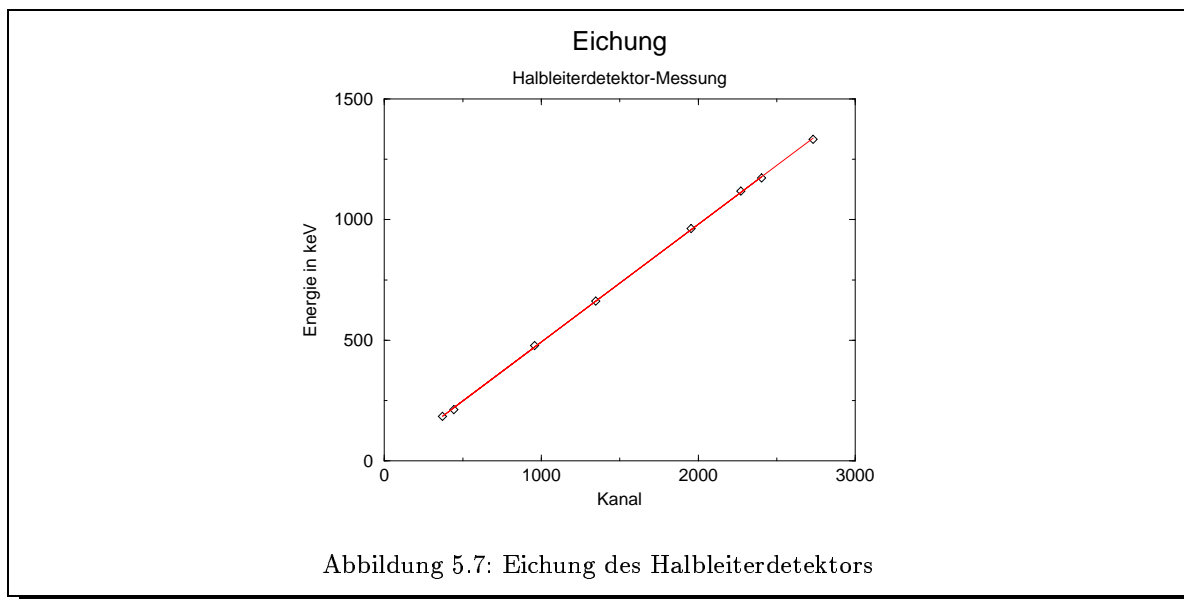


Abbildung 5.7: Eichung des Halbleiterdetektors

ist wahrscheinlich eine charakteristische Röntgenstrahlung, die durch die Ionisationswirkung der γ -Strahlung angeregt ist.

Nach dieser Eichung können wir nun endlich unbekannte Spektren detektieren und untersuchen.

5.4 Messungen mit dem Halbleiterdetektor

5.4.1 Kompliziertes Spektrum

Wir haben das Spektrum zweier unbekannter Quellen für jeweils 300 sec aufgenommen. Das Spektrum des Präparats 1 sieht wie folgt aus:

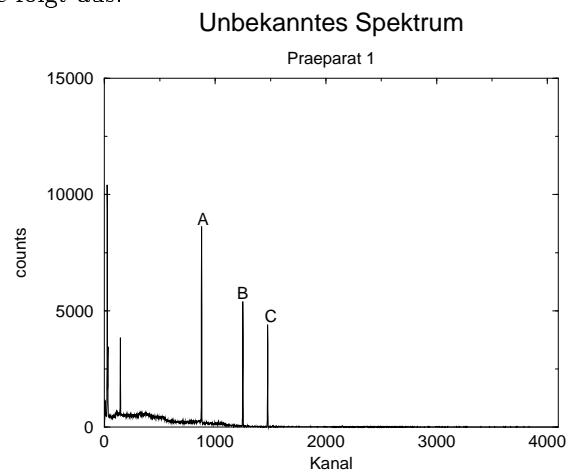


Abb. 5.8: Spektrum des unbekanntes Präparats 1

Und nun das Spektrum des zweiten unbekanntes Präparats. Da die hochenergetischen Peaks schwach sind, haben wir diesen Bereich nochmals vergrößert geplottet:

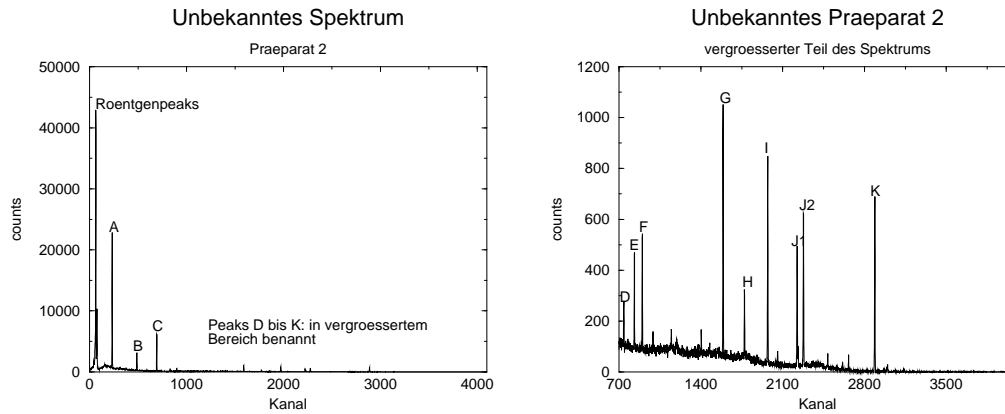


Abb. 5.9: Spektrum des unbekanntes Präparats 2 (links: vollständig, rechts: vergrößerter Bereich der höherenergetischen Peaks)

Die Kanäle und die FWHM's der Peaks, die wir jeweils durchbuchstabiert haben, haben wir mittels Peak Report des Programmes nucleus bestimmt und über unsere Eichung in Energien umgerechnet. Die Intensitäten haben wir durch die Net area des Programmes nucleus bestimmt; die relativen Werte sind auf den stärksten Peak normiert. Die Peaks niedrigerer Energie als jeweils Peak A sind auf charakteristische Röntgenstrahlen zurückzuführen (durch Ionisation wegen der γ -Strahlen hervorgerufen) und daher im folgenden nicht weiter betrachtet. Die Fehler der Energien lagen im Promillebereich, weshalb man sie in diesem Zusammenhang vernachlässigen kann. Die Nichtlinearitäten und Drifts im Hauptverstärker und VKA sind sowieso größer. Hier nun die Tabelle mit den Werten und die Literaturwerte zu unseren Präparate-Tips:

Präparat 1							Literaturwerte	
Peak	Kanal	Energie [keV]	FWHM Kanäle	FWHM [keV]	Net area	Intensität, rel. [%]	Energie [keV]	Intensität, rel. [%]
A	877,322	432,11	3,4203	1,6708	31 488	100	433,939	99,1
B	1249,68	614,01	3,5331	1,7259	20 689	65,7	614,281	99,7
C	1473,97	723,57	3,6241	1,7704	17 170	54,5	722,938	100

Präparat 2							Literaturwerte	
Peak	Kanal	Energie [keV]	FWHM Kanäle	FWHM [keV]	Net area	Intensität, rel. [%]	Energie [keV]	Intensität, rel. [%]
A	232,184	116,96	3,0793	1,5042	78 504	100	121,78	100
B	486,241	241,07	3,1422	1,535	9 649	12,3	244,69	26,28
C	692,153	341,66	3,4169	1,6692	22 543	28,7	344,28	93,61
D	740,687	365,37	6,2978	3,0765	710	0,9	367,79	2,97
E	830,621	409,3	3,9381	1,9238	1 417	1,81	411,12	7,86
F	898,291	442,36	3,9369	1,9232	1 742	2,22	443,98	10,86
G	1589,64	780,08	3,9128	1,9114	4 120	5,25	778,9	45,44
H	1772,55	869,43	4,6224	2,258	1 131	1,44	867,39	14,61
I	1971,97	966,85	4,0909	1,9984	3 362	4,28	964,13	50,8
J1	2223,27	1089,61	4,7364	2,3137	1 997	2,54	1085,9	34,14
J2	2277,46	1116,08	4,2327	2,0677	2 718	3,46	1112,11	47,65
K	2888,04	1414,35	4,6328	2,2631	3 343	4,26	1408,01	73,42

Die Literaturwerte sind dem Lederer [Led] entnommen. Glücklicherweise sind beide unbekanntes Nuklide Energiestandards. Daher sind sie explizit im Anhang des [Led] aufgeführt, sodaß sie beim Energievergleich schnell gefunden waren. Die Übereinstimmungen der Energien sind auf circa 4 keV genau

oder besser, was wir für recht überzeugend halten. Beim ersten Präparat haben wir in obiger Tabelle die Literaturwerte zur Energie und Intensität von Silber ^{108}Ag aufgeführt, beim zweiten Präparat sind es die entsprechenden Werte von Europium ^{152}Eu .

Wir haben also anhand der Energien unser erstes Präparat als ^{108}Ag und unser zweites Präparat als ^{152}Eu identifiziert. Hingegen stimmen die gemessenen Intensitäten natürlich nicht mit den Literaturwerten überein, weil wir die Efficiency unseres Detektors nicht beachtet haben (was wir auch nicht konnten, weil wir sie nicht kennen). Die Efficiency, also das Verhältnis der γ -Quanten, die eine Reaktion im Detektor hervorrufen, zu den insgesamt in Richtung Detektor ausgestrahlten γ -Quanten, ist ja von der Energie der γ -Quanten abhängig (vgl. die Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte der Reaktionen mit Materie). Mit unserer Messung könnten wir natürlich umgekehrt die Efficiency unseres Detektors bestimmen, wenn die Präparate eindeutig richtig identifiziert sind.

Energieabhängigkeit der FWHM beim Halbleiterdetektor

In der letzten Tabelle haben wir auch die FWHM's der jeweiligen Peaks angegeben. Die Energieauflösung des Halbleiterdetektors liegt ungefähr bei 0,2%, ist also wesentlich besser als beim Szintillationsdetektor. Auf die Auflistung der Berechnung der $\frac{\text{FWHM}}{\sqrt{E}}$ -Werte haben wir hier verzichtet, denn sie streuen ziemlich stark. Die theoretisch erwartete Konstante ergibt sich also nicht. Woran liegt das?

Als wichtigste Ursache erkennt man, daß die Peak-Gaußverteilungen so schmal sind, daß auch sehr geringe Gauß-Verteilungen (d. h. mit geringer Streuung σ), deren Ursprung energieunabhängig ist oder eine andere Energieabhängigkeit hat als die erwartete (wie beim Szintillator beschriebene), über eben diese bereits beschriebene erwartete Verteilung gefaltet sind. Das Rauschen des Detektors und der nachfolgenden Elektronik ist z. B. nur durch die Umgebungstemperatur und nicht die γ -Energien bestimmt. Auch andere Nichtlinearitäten der Elektronik und kleine Driften über die Meßzeit können die Energieauflösung entgegen unserer statistischen Erklärung mit anderer Energieabhängigkeit verschlechtern. Letztlich dürfen wir auch nicht mehr vernachlässigen, daß die Peak-to-total-ratio sich mit der Energie ändert; bei steigender Energie können nicht mehr so viele γ -Quanten ihre komplette Energie abgeben. Somit ändert sich auch durch die Geometrie des Detektors die Detektier-Statistik energieabhängig.

5.4.2 Spektrum des Raumentgrundes

Mit dem Halbleiterdetektor nahmen wir eine halbe Stunde lang die im Raum befindliche Hintergrundstrahlung auf. Es ergab sich folgendes Spektrum:

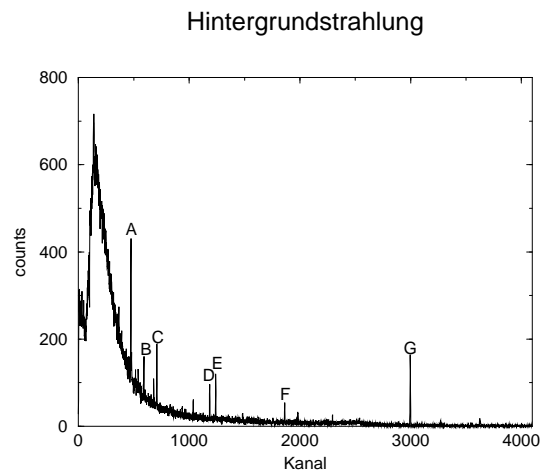
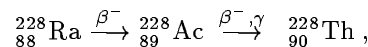


Abb. 5.10: Spektrum der Hintergrundstrahlung

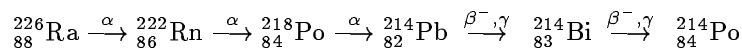
Dabei fanden wir wieder mittels Peak Report des Programms nucleus folgende Kanäle für die gemessenen Peaks, die wir in unserer obigen Abbildung durchbuchstabiert haben. Mit unserer Eichung haben wir die Kanäle in Energien umgerechnet. In der folgenden Tabelle geben wir auch jeweils eine versuchte Herkunftsdeutung an, indem wir den wahrscheinlich verursachenden Zerfall notieren. Also hier die Ergebnisse:

Peak	Kanal	Energie [keV]	Zerfall	theor. Energie [keV]
A	473,887	235,03	${}_{82}^{212}\text{Pb} \rightarrow {}_{83}^{212}\text{Bi} \rightsquigarrow \gamma$	238,63
B	591,261	292,37	${}_{82}^{214}\text{Pb} \rightarrow {}_{83}^{214}\text{Bi} \rightsquigarrow \gamma$	295,21
C	708,115	349,45	${}_{82}^{214}\text{Pb} \rightarrow {}_{83}^{214}\text{Bi} \rightsquigarrow \gamma$	351,92
D	1185,65	582,73	${}_{81}^{208}\text{Tl} \rightarrow {}_{82}^{208}\text{Pb} \rightsquigarrow \gamma$	583,14
E	1239,81	609,19	${}_{83}^{214}\text{Bi} \rightarrow {}_{84}^{214}\text{Po} \rightsquigarrow \gamma$	609,31
F	1862,74	913,49	${}_{89}^{228}\text{Ac} \rightarrow {}_{90}^{228}\text{Th} \rightsquigarrow \gamma$	911,1
G	2996,84	1467,5	${}_{19}^{40}\text{K} \rightarrow {}_{18}^{40}\text{Ar} \rightsquigarrow \gamma$	1460,81

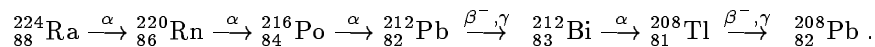
Die theoretischen Energien stammen natürlich wieder aus dem [Led]; es handelt sich jeweils um die intensivste Strahlung der angegebenen Zerfälle (nur diese können wir in der „kurzen“ Zeit detektieren). Wieso treten aber gerade diese Zerfälle auf? Dazu überlegen wir kurz die Ursprünge der Hintergrundstrahlung. Zum einen gibt es die *natürliche* Strahlung, welche aus kosmischer und terrestrischer Strahlung herrührt. Der kosmische Teilchenregen besteht u. a. aus Protonen und Myonen, welche durch Stöße andere Radionuklide aus den Luftmolekülen erzeugen. In dem Keller der Kernphysik sind diese Phänomene aber so gering, daß wir sie nicht merkbar registrierten. Die terrestrische Strahlung stammt aus Elementen der Erdkruste. In dieser befinden sich z. B. Kalium und auch Radium. Wird nun „die Erdkruste zu Baustoffen verarbeitet“, so sind immer noch solche Radionuklide im Beton, usw. enthalten, sodaß man hierdurch *künstliche* Strahlungen erhält. Diese sind bei uns im wesentlichen aufgetreten. Zum einen ist der Kaliumzerfall mit seiner charakteristischen 1460,8 keV-Strahlung von uns direkt detektiert worden, zum anderen stammen die restlichen Zerfälle von Radium, das als Radon ausgast und dann sogar in der Luft (und nicht nur in den Wänden) vorhanden ist. Es treten vor allen Dingen drei Zerfallsreihen von drei Radiumnukliden ausgehend auf: Zunächst



wobei diese für die 911,1 keV-Linie verantwortlich ist; weiterhin



und schließlich



Bei den nicht mit γ gekennzeichneten Zerfällen tritt kaum γ -Strahlung auf, da die Tochterkerne meist zu über 90% direkt im Grundzustand vorliegen. Die restliche γ -Strahlung ist daher mit unserer Detektionszeit nicht registrierbar.

Wir konnten eigentlich ziemlich gut sehen, woher die Hintergrundstrahlung kommt. Wir schlußfolgern: Beton ist recht gefährlich :-)

5.5 Linearer Absorptionskoeffizient von Aluminium

Nun wollen wir abschließend noch den linearen Absorptionskoeffizienten von Aluminium bestimmen. Die Messung mit den verschiedenen Aluminiumplatten beschrieben wir schon unter den Meßdaten auf Seite 24. Nach der Theorie sollte Gleichung (2.5) für die Intensitäten gelten, also auch für die Nettozählraten net integral , da diese sich ja nur um einen festen Faktor von den Intensitäten unterscheiden. Zur Überprüfung dieses Gesetzes mit unseren Meßdaten tragen wir nun unsere Nettozählraten logarithmisch gegen die Dicke auf. Es sollte sich eine Gerade mit negativer Steigung, deren Betrag der lineare Absorptionskoeffizient ist, ergeben. Schauen wir uns an, was sich aus unseren Meßdaten ergibt:

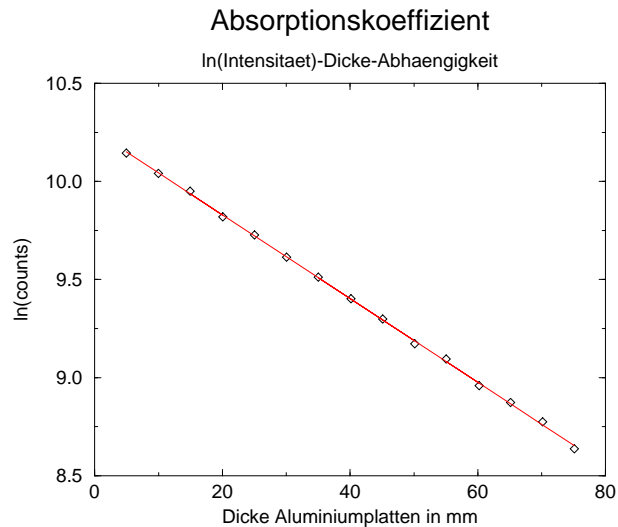


Abb. 5.11: Zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten

In der Tat kann man eine sehr schöne Gerade an die Meßdaten anpassen. Mittels linearer Regression ergibt sich:

$$\ln(\text{counts}) = (-0,02135 \pm 0,00013) \frac{1}{\text{mm}} \cdot d + (10,2565 \pm 0,0058) .$$

Also erhält man für den linearen Absorptionskoeffizienten μ für Aluminium

$$\mu = (0,2135 \pm 0,0013) \cdot \frac{1}{\text{cm}} .$$

Der Literaturwert des Absorptionskoeffizienten von Aluminium bei einer Energie von 662 keV (unserer ^{137}Cs -Linie) beträgt nach [KK]:

$$\mu_{\text{Lit}} = 0,205 \cdot \frac{1}{\text{cm}} .$$

Damit liegt zwar der Literaturwert nicht innerhalb der (sehr kleinen) Fehlergrenzen unseres Ergebnisses, die relative Abweichung beträgt 4,2%. Dennoch bedeuten die kleinen Fehlergrenzen, daß unsere Meßpunkte ziemlich gut auf einer Geraden liegen. Der Literaturwert ist bereits ein wenig älter, also wohl noch nicht mit Halbleiterdetektoren aufgenommen. Aufgrund der schlechteren Energieauflösung von anderen Detektoren ist also anzunehmen, daß der Fehler des Literaturwerts verhältnismäßig groß ist. Angegeben ist kein Fehler; ein Buch hat das wohl nicht nötig :-). Ansonsten ist eine Ursache für die Diskrepanz der beiden Werte vermutlich auch eine Verunreinigung der Aluminium-Platten, z. B. durch unsere Fettfinger. Außerdem standen die Platten nicht immer ganz exakt senkrecht (die dünnen lehnten an den dickeren), aber dies dürfte keine größeren Auswirkungen hervorrufen. Ebenfalls keine Auswirkungen sind durch den Algorithmus von nucleus zur Berechnung der Nettozählrate zu erwarten: Durch die auf Seite 24 angedeutete Korrektur per Hand ergeben sich sehr ähnliche Werte wie von nucleus

angegeben, was wir bei ein paar Stichproben überprüften. Außerdem brauchen wir uns nicht darum zu sorgen, daß die Luft, die bei fehlenden Aluminiumplatten zwischen Quelle und Detektor ist, das Ergebnis beeinflussen könnte, denn deren Absorptionskoeffizient beträgt nur $\mu_{\text{Luft}} = 0,00004 \cdot \frac{1}{\text{cm}}$.

Trotz unseres leicht größeren Ergebnisses des linearen Absorptionskoeffizienten ist die Bestätigung des Gesetzes (2.5) sehr überzeugend. Auch der Wert selbst ist für unsere Verhältnisse recht gut bestimmt. Wir können recht zufrieden sein.

Unser Versuch ist also alles in allem sehr gut verlaufen. Alle Versuchsteile brachten Ergebnisse wie erwartet, einschließlich der gelungenen Identifikation der beiden unbekanntem Präparate. Gut.

A. Ergänzungen

Wir haben ja bereits an den verschiedenen Stellen in der Vorbereitung auf diesen Anhang verwiesen. Aber nochmals: In diesem Anhang wollen wir ein paar theoretische Ergänzungen zu den Paritäten, Kugelflächenfunktionen und Lebensdauern, etc. angeben, wobei wir auch hier nicht immer allzu sehr ins Detail gehen wollen.

A.1 Die Kugelflächenfunktionen

Wenn wir Nukleonen, Kerne als ganzes und Photonen beschreiben wollen, so suchen wir natürlich (wie immer) Lösungen der Schrödingergleichung $(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U) \cdot \psi(\underline{r}, t) = i\hbar \frac{d}{dt} \psi(\underline{r}, t)$. Wenn das U zeitunabhängig ist und kugelsymmetrisch, können wir verschiedene Separationsansätze zur einfacheren Lösung der Schrödingergleichung anwenden. Der erste Ansatz ist die Separation der Zeit, was man sehr bald in jeder Quantenmechanikvorlesung lernt. Es ergibt sich die einfache Zeitabhängigkeit $\exp(-\frac{i}{\hbar}Et)$; für die Ortsabhängigkeit bleibt die übliche Eigenwertgleichung oder ortsabhängige Schrödingergleichung $(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U) \cdot \psi(\underline{r}) = E\psi(\underline{r})$ zu lösen. Hiervon ausgehend können wir nun die Winkelkoordinaten abseparieren (das haben wir natürlich auch schon in der Quantenmechanik durchgeführt; wir wiederholen es hier), indem wir als Ortskoordinaten zunächst Kugelkoordinaten mittels $\underline{r} = (r, \varphi, \vartheta)$ einführen. Natürlich müssen wir dann auch den Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten ausschreiben und es ergibt sich

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

Der Separationsansatz ist nun $\psi(\underline{r}) = f(r) \cdot Y(\varphi, \vartheta)$. Einsetzen in die ortsabhängige Schrödingergleichung liefert nach Multiplikation mit $\frac{2mr^2}{\hbar^2 R Y}$:

$$-\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (U(r) - E) \cdot \frac{2mr^2}{\hbar^2} = \frac{1}{Y} \cdot \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right].$$

Beide Seiten sind gleich einer Separationskonstanten $-\lambda$, da die Variablen vollständig getrennt sind. Insbesondere ergibt sich die Winkelgleichung

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0. \quad (\text{A.1})$$

Die Radialgleichung betrachten wir im folgenden nicht weiter; mit der Substitution $u(r) = r \cdot R(r)$ erhält man eine eindimensionale ortsabhängige Schrödingergleichung mit einem zusätzlichen Zentrifugalpotential $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$ (vgl. auch [FP-9]).

Wir separieren nun die Winkelgleichung noch weiter mittels des Ansatzes $Y(\varphi, \vartheta) = \Phi(\varphi) \cdot \Theta(\vartheta)$. Einsetzen in (A.1) und Multiplikation mit $\frac{\sin^2 \vartheta}{\Theta \Phi}$ liefert

$$\frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \lambda \sin^2 \vartheta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}.$$

Mit der Separationskonstanten m^2 ergeben sich somit die Gleichungen

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad \text{und} \quad (\text{A.2})$$

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + (\lambda \sin^2 \vartheta - m^2) \cdot \Theta = 0. \quad (\text{A.3})$$

Eine normierte Lösung von der Differentialgleichung (A.2) ist

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{im\varphi}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$. Dies ist natürlich nur ein Spezialfall der allgemeinen Lösung, der aber im Gegensatz zu der allgemeinen Lösung physikalische Bedingungen, wie z. B. die 2π -Periodizität der Winkelkoordinaten φ beachtet; wir wollen nicht im einzelnen auf diese Argumente eingehen.

Bleibt also noch Gleichung (A.3) zu untersuchen. Hierzu dividieren wir sie durch $\sin^2 \vartheta$, substituieren $w = \cos \vartheta$ (dies ist sinnvoll, weil bei Kugelkoordinaten $0 < \vartheta < \pi$ gilt) und ersetzen $\Theta(\vartheta)$ durch $P(w)$. Damit erhalten wir die sogenannte *Legendresche Differentialgleichung* in der allgemeinen Form (mit obigem $m \in \mathbb{Z}$):

$$(1 - w^2) \frac{d^2 P}{dw^2} - 2w \frac{dP}{dw} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - w^2} \right) \cdot P = 0. \quad (\text{A.4})$$

Wir suchen nun Lösungen P dieser Gleichung unter den physikalischen Nebenbedingungen, daß P auf $]-1, 1[$ definiert ist und die Grenzwerte bei -1 und 1 existieren (die Lösung soll ja für $0 \leq \vartheta \leq \pi$ existieren und es gilt: $w = \cos \vartheta \in [-1, 1]$). Dies ist eine schwierige Aufgabe, die man über die Theorie komplexer Differentialgleichungen (also der Kombination funktionentheoretischer Techniken mit der Theorie der Differentialgleichungen) lösen kann. Wir verweisen hier auf [Jän, S. 304-354]; wir wollen hier nicht diese 50 Seiten ausführlich darlegen :-). Wir geben hier also nur die Ergebnisse an:

Zunächst sucht man die Lösung speziell für $m = 0$. Bei dieser Suche stellt sich heraus, daß sich eine nichttriviale Lösung nur für $\lambda = l(l+1)$ und $l \in \mathbb{N}_0$ ergibt. Die angesetzte Potenzreihe bricht in diesen Fällen ab; die Lösungen sind also Polynome. Wenn man sie durch die Bedingung $P_l(1) = 1$ normiert, erhält man als Lösung die sogenannten *Legendre-Polynome*. Nach *Rodriguez* kann man sie über folgende Formel berechnen:

$$P(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2 - 1)^l. \quad (\text{A.5})$$

Speziell ergeben sich also die ersten Legendreschen Polynome als:

$$\begin{aligned} P_0(w) &= 1, & P_1(w) &= w, \\ P_2(w) &= \frac{1}{2} (3w^2 - 1), & P_3(w) &= \frac{1}{2} (5w^3 - 3w), \\ P_4(w) &= \frac{1}{8} (35w^4 - 30w^2 + 3), & P_5(w) &= \frac{1}{8} (63w^5 - 70w^3 + 15w). \end{aligned}$$

Alternativ können bei Kenntnis von $P_0(w)$ und $P_1(w)$ die Legendre-Polynome auch über folgende Rekursionsformel berechnet werden:

$$(l+1)P_{l+1}(w) = (2l+1)wP_l(w) - lP_{l-1}(w).$$

Es bleibt noch zu erwähnen, daß die Legendre-Polynome orthogonal aufeinander stehen und ein vollständiges Funktionensystem bilden für L^2 -integrierbare Funktionen auf $[-1, 1]$. Sie sind die einzigen solchen Orthogonalpolynome auf $[-1, 1]$, die wie oben normiert sind.

Als nächstes wird die Lösung für beliebige $m > 0$ gesucht. Es stellt sich heraus, daß wiederum nur Lösungen für $\lambda = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}_0$ und $|m| \leq l$ mit $|m| \in \mathbb{N}_0$ existieren. Die Lösung sieht nun sehr einfach aus: Es handelt sich um die *zugeordneten Legendre-Polynome*, die sich für $m > 0$ wie folgt aus den Legendre-Polynomen berechnen:

$$P_l^m(w) = (1 - w^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dw^m} P_l(w). \quad (\text{A.6})$$

Für negative m gibt es verschiedene (jeweils willkürliche) Konventionen: Wir benutzen folgende¹: Wir lesen die Formel von Rodriguez (A.5) auch für $m < 0$ als gültig; es ergibt sich dann folgende Beziehung: $P_l^{-m}(w) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(w)$.

Wir können nun bereits eine erste Kugelflächenfunktion aus den Lösungen unserer Differentialgleichungen (A.2) und (A.3) zusammensetzen: $Y_{\text{bisher}} = P_l^m(\cos \vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$. Wir wollen diese nun nur noch normieren; dazu berechnen wir den Betrag von Y_{bisher} über das normale Skalarprodukt auf \mathcal{L}^2 :

$$\|P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}\| = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}.$$

Mit einem willkürlichen Faktor $(-1)^m$ definieren wir daher schließlich und endlich die *Kugelflächenfunktionen*:

$$Y_{lm}(\varphi, \vartheta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos(\vartheta)) e^{im\varphi}$$

für $l \in \mathbb{N}_0$ und $|m| \leq l$. Speziell für $l \leq 3$ und $m \leq l$ ergeben sich folgende Kugelflächenfunktionen:

$$\begin{aligned} l=0: & \quad Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad m=0 \\ l=1: & \quad \begin{cases} Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, & m=0 \\ Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi}, & m=1 \end{cases} \\ l=2: & \quad \begin{cases} Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}\right), & m=0 \\ Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi}, & m=1 \\ Y_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, & m=2 \end{cases} \\ l=3: & \quad \begin{cases} Y_{3,0} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{2} \cos \vartheta\right), & m=0 \\ Y_{3,1} = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \vartheta (5 \cos^2 \vartheta - 1) e^{i\varphi}, & m=1 \\ Y_{3,2} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta e^{2i\varphi}, & m=2 \\ Y_{3,3} = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \vartheta e^{3i\varphi}, & m=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormal-Funktionensystem. Aufgrund der Konstruktion erfüllen sie natürlich die Drehimpulseigenwertgleichungen

$$\hat{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}, \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{L}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm}. \quad (\text{A.8})$$

Dies kann man natürlich auch leicht nachprüfen, indem man die Operatoren in Kugelkoordinaten darstellt. Für $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$ benutzt man dann Gleichung (A.1); die Eigenwertgleichung steht dann im Prinzip da. Die Eigenwertgleichung zu $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ergibt sich durch Okularinspektion der skalaren Kugelflächenfunktion.

Parität der Kugelflächenfunktionen

Wir wollen nun die Parität der skalaren Kugelflächenfunktionen bestimmen, wie wir es in der Vorbereitung beschrieben haben. Dazu müssen wir also wissen, wie die Funktion $\Pi : \underline{r} \rightarrow -\underline{r}$ sich in Kugelkoordinaten ausdrückt: Man macht sich leicht klar, daß Π dann folgendermaßen aussieht:

$$\Pi : (r, \varphi, \vartheta) \rightarrow (r, \varphi + \pi, \pi - \vartheta).$$

¹Eine andere Konvention setzt $P_l^{-m}(w) = (-1)^m P_l^m(w)$. Dann ergibt sich später folgendes Aussehen der Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{lm}(\varphi, \vartheta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \cdot P_l^m(\cos(\vartheta)) e^{im\varphi}.$$

Nutzen wir also die transformierten Koordinaten, indem wir zunächst die Paritäten der Legendre-Polynome und der zugeordneten Legendre-Polynome bestimmen: Mit der Formel (A.5) ergibt sich über

$$P_l(\cos(\pi - \vartheta)) = P_l(-\cos \vartheta) = (-1)^l P_l(\cos \vartheta)$$

die Parität $(-1)^l$ für die Legendre-Polynome. Mit Formel (A.6) ermitteln wir durch die Betrachtung

$$\begin{aligned} P_l^m(\cos(\pi - \vartheta)) = P_l^m(-\cos \vartheta) &= (1 - (-\cos \vartheta)^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d(-\cos \vartheta)^m} P_l(-\cos \vartheta) \\ &= (1 - \cos^2 \vartheta)^{\frac{m}{2}} (-1)^m \frac{d^m}{d(\cos \vartheta)^m} (-1)^l P_l(\cos \vartheta) = (-1)^{m+l} P_l^m(\cos \vartheta) \end{aligned}$$

die Parität $(-1)^{l+m}$ für die zugeordneten Legendre-Polynome. Weiterhin ergibt sich die Parität $(-1)^m$ für $\Phi(\varphi)$ durch

$$e^{im(\varphi+\pi)} = e^{im\pi} \cdot e^{im\varphi} = (-1)^m e^{im\varphi}.$$

Zusammengesetzt gilt also, wobei wir die Normierungskonstante durch N abkürzen:

$$Y_{lm}(\varphi + \pi, \pi - \vartheta) = N P_l^m(\cos(\pi - \vartheta)) e^{im(\pi+\varphi)} = N \cdot (-1)^{l+m+m} \cdot P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} = (-1)^l Y_{lm}(\varphi, \vartheta).$$

Wir erkennen also, daß die skalaren Kugelflächenfunktionen die Parität $(-1)^l$ besitzen, d. h. für gerade l haben wir symmetrische Kugelflächenfunktionen, für ungerade l sind sie antisymmetrisch.

A.2 Drehimpulse der Photonen

Bevor wir weiter Entwicklungen nach Kugelflächenfunktionen betrachten, wollen wir ein paar grundsätzliche Gedanken über die Drehimpulse von Photonen vorstellen (vergleiche [LaL4, § 6, S. 15-18]). Wir betrachten hier einige Aussagen der *Quantenelektrodynamik* QED, sodaß wir einige Tatsachen nicht näher begründen wollen/können. Wir beginnen damit, daß die Wellenfunktion der Photonen in dreidimensional-transversaler Eichung ein Vektor $A(k)$ ist (das Vektorpotential), wobei k der Impuls ist, und keine skalare Wellenfunktion. Ein Vektor ist aber einem Spinor 2-ter Stufe äquivalent. Ein solcher Spinor steht aber herkömmlich für ein Teilchen mit Spin 1. In *diesem* Sinne können wir Photonen den Spin 1 zuweisen. Zusätzlich gilt nun die Transversalitätsbedingung $k \cdot A(k) = 0$. Das bedeutet, daß dem Spinanteil eine Impulsabhängigkeit aufgelastet wird (entsprechend auch eine Ortsabhängigkeit); das wiederum darf für einen Spin aber eigentlich nicht der Fall sein. Unser Spin „in diesem Sinne“ ist also gar keiner und wir stellen fest, daß wir bei Photonen den Gesamtdrehimpuls *gar nicht* in Bahndrehimpuls l und Spin s trennen können (außerdem kann ein Photon ja nicht ruhen, was für die Interpretation eines Eigendrehimpulses nötig wäre). Wir tun dies nur *formal*: Wir sagen, der Spin des Photons ist $s = 1$, weil $A(k)$ ein Vektor ist. Ein l können wir nun einführen, indem wir verlangen, daß die Vektorsummen von s und l gerade j sind, also sind (für $j > 0$) zunächst $l = j - 1$, $l = j$ und $l = j + 1$ möglich. Formal tauchen diese „Bahndrehimpulse“ als Ordnung der Kugelflächenfunktionen auf. Wir stellen noch fest, daß nur ganzzahlige j möglich sind, weil keine Spinoren ungerader Stufe zur Beschreibung der charakteristischen Größen von Photonen nötig sind.

Uns interessiert natürlich jetzt, welche Paritäten Photonen haben können. Dazu müssen wir uns aber erstmal klar machen, wie der Operator $\Pi : \underline{r} \rightarrow -\underline{r}$ auf vektorielle Funktionen wirkt (bisher waren die Funktionen skalar). Bei vektoriellen Funktionen müssen wir nämlich noch beachten, daß auch der vektorielle Wert der Funktion invertiert wird. Für solche Funktionen sieht die Parität also folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \Pi A(k) &= -A(-k) = +A(k) \quad \text{für } P = +1 \text{ und} \\ \Pi A(k) &= -A(-k) = -A(k) \quad \text{für } P = -1. \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Photonenwellenfunktionen als Kugelflächenfunktionen schreiben wollen, so müssen wir die skalaren Kugelflächenfunktionen vektorisieren; wie das geschieht, sehen wir später. Durch das Vektorisieren ändert sich gerade die Parität der skalaren Kugelflächenfunktionen um (-1) ; wir stellen also fest, daß alle Photonen die Parität

$$P_{\text{Photon}} = (-1)^{l+1}$$

besitzen. Wir wollen jetzt für vorgegebenes j die Zahl der möglichen Zustände (ohne Beachtung der $(2j+1)$ -fachen Richtungs-Entartung) ermitteln. Für $j = 0$ ist nur $l = 1$ möglich; es ergibt sich also *ein* Zustand mit Parität $P = +1$. Für $j > 0$ haben wir bereits oben die möglichen l -Werte angegeben; hier noch einmal mit der zugehörigen Parität:

$$\begin{aligned} l = j, & \quad P = (-1)^{l+1} = (-1)^{j+1} \\ l = j \pm 1, & \quad P = (-1)^{l+1} = (-1)^j \end{aligned}$$

Bei dieser Abzählung ist aber die Transversalitätsbedingung für $A(k)$ nicht beachtet worden (nach den bisherigen Betrachtungen wäre die Trennung des Gesamtdrehimpulses in s und l ja noch sinnvoll). Wir müssen also von unseren Zuständen noch die longitudinalen Zustände abziehen. Ein solcher longitudinaler Vektor läßt sich natürlich als $k\phi(k)$ mit einem skalaren ϕ schreiben. Bei Drehungen (um k) verhält sich also ein longitudinaler Vektor wie ein Skalar, d. h. wie ein Spinor nullter Stufe. Wir können jetzt wieder dem longitudinalen Vektor einen „Spin“ 0 zuordnen (er hat jetzt also einen Spin 1 und einen Spin 0; also nochmals: diese Spins sind rein formal und besitzen keine physikalische Realität). Daher ist das j des longitudinalen Vektors gleich der Ordnung der skalaren Kugelflächenfunktion in ϕ , die Parität ist also $(-1)^j$. Man muß also von den oben abgezählten Zuständen jeweils einen mit der Parität $(-1)^j$ abziehen. Übrig bleiben für $j > 0$ zwei Zustände: einer mit Parität $(-1)^j$, das elektrische Photon, und einer mit Parität $(-1)^{j+1}$, das magnetische Photon. Für $j = 0$ bleibt überhaupt *kein* Zustand übrig, Photonen mit $j = 0$ gibt es nicht. Wir haben damit nun bewiesen, daß ein $0 \rightarrow 0$ -Übergang beim γ -Zerfall nicht auftreten kann (nur bei innerer Konversion). Das hätte uns natürlich direkt klar sein können, denn die Kugelflächenfunktionen für $j = 0$ sind kugelsymmetrisch und daher sicher nicht rein transversal. Also abschließend nochmal: Photonen gibt es nur für $j \in \mathbb{N}$, es existieren jeweils zwei zu diesen Gesamtdrehimpulsen, die elektrischen mit Parität $(-1)^j$ und die magnetischen mit Parität $(-1)^{j+1}$.

A.3 Multipoldarstellung für Photonen konkret

Wir wollen jetzt die Multipolgleichungen für die Photonen aufstellen. Natürlich könnte man die γ -Strahlung an sich als ebene Wellen betrachten; dann könnte man aber keine Aussagen über die Drehimpulse machen, die die Photonen beim Zerfall wegtragen. Da die einzelnen Photonen natürlich einen festen Drehimpuls haben, kann man nur in Abhängigkeit dieser Drehimpulse Aussagen über die Zerfallswahrscheinlichkeiten angeben; insbesondere, da auch die Auswahlregeln genaue Bedingungen an die Drehimpulse der Photonen verlangen.

Wir bezeichnen im folgenden die skalaren Kugelflächenfunktionen mit Y_{jm} und meinen damit die obigen Kugelflächenfunktionen Y_{lm} mit den l , die wir wie oben aus dem j ermitteln. Im folgenden gelte $\hbar = 1$ und $c = 1$. Wir suchen nun zunächst vektorielle Funktionen, die Eigenfunktionen zu den zu (A.7) und (A.8) analogen vektoriellen Eigenwertgleichungen sind. Nach [LaL4, § 7, S. 18-22] ergeben sich folgende Lösungen zu dieser Frage, wobei n der Einheitsvektor in Richtung von k ist:

$$\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{el.})} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \nabla_n Y_{jm}, \quad \mathbf{Y}_{jm}^{(\text{magn.})} = n \times \mathbf{Y}_{jm}^{(\text{el.})}, \quad \mathbf{Y}_{jm}^{(\text{long.})} = n Y_{jm}.$$

Hierbei beinhalten die elektrische und die longitudinale Lösung Kugelfunktionen der Ordnungen $l = j \pm 1$ (s. o.), sodaß die Parität dieser Lösungen $P = (-1) \cdot (-1)^l = (-1)^{j \pm 1 + 1} = (-1)^j$ ist. Die longitudinale Lösung brauchen wir natürlich nicht weiter zu betrachten, da sie ja nicht die Transversalitätsbedingung erfüllt. Die magnetische Lösung nun beinhaltet nur die Kugelfunktion der Ordnung $l = j$ (s. o.), sodaß hier die Parität $P = (-1) \cdot (-1)^l = (-1)^{j+1}$ ist.

Um nun die endgültige Wellenfunktion für die Photonen zu erhalten müssen wir noch ihre Energie ω in die Gleichung bringen. Dies geschieht über eine δ -Distribution, da die Energie exakt festliegt, und somit ergibt sich geeignet normiert:

$$A_{\omega jm}(k) = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|k| - \omega) \mathbf{Y}_{jm}(n).$$

Es ist jeweils die elektrische bzw. magnetische Lösung einzusetzen, je nachdem, welche Parität das Photon hat. Das elektrische Photon kann man nun noch umeichen, so daß man neben A auch noch ein zugehöriges Φ angeben muß (beim magnetischen Photon geht dies nicht, denn man erhielte dann eine undefinierte Parität).

Die Gleichungen sehen dann so aus:

$$\begin{aligned} A_{\omega jm}^{(el.)}(k) &= \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|k| - \omega) (Y_{jm}^{(el.)} + CnY_{jm}), \\ \Phi_{\omega jm}^{(el.)}(k) &= \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|k| - \omega) CY_{jm}, \end{aligned}$$

wobei C eine beliebige Konstante.

A.4 Die Emissionswahrscheinlichkeit und die Lebensdauer

Wir werden nun unsere Mühen beenden und andeuten, wie man die Emissionswahrscheinlichkeit und damit auch die Lebensdauer angeregter Kerne berechnet. Zunächst verweisen wir aber auf [Butt, S. 357-374] und [Jac, p. 136-141, 739-775], die dieselben Formeln klassisch direkt aus den Maxwell-Gleichungen herleiten, also ohne QED. Wir hingegen deuten die QED-Vorgehensweise an, weil sie halt deutlich kürzer ist (und sogar korrekter) und folgen darin [LaL4, § 46, 47, S. 155-161].

Die Herleitungen benutzen verschiedene Näherungen (exakt hat unsere Problematik noch keiner gelöst), wir wollen dieselben zunächst rechtfertigen. Wir benutzen zum Beispiel, daß der Kernradius R sehr viel kleiner als die ausgestrahlte Wellenlänge λ ist. Wie kann man dies einsehen? Dazu betrachten wir (vorübergehend wieder mit \hbar und c):

$$\frac{R}{2\pi\lambda} = \frac{R\omega}{c} \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{R \cdot \Delta E}{\hbar c} \ll 1,$$

woraus mit empirischen Werten für den Kernradius $\Delta E \ll 20$ MeV folgt. Dies ist i. a. mit unserer zu detektierenden γ -Strahlung erfüllt.

Die Emissionswahrscheinlichkeit berechnen wir natürlich mit der 2. Goldenen Regel von Fermi, die hier das einfache Aussehen $w = 2\pi|V_{fi}|^2$ hat. Die Berechnung des Übergangsmatrixelements V_{fi} geschieht dabei folgendermaßen:

$$V_{fi} = e \int j_{fi}^\mu(r) A_\mu^*(r) dx^3 = e \int dx^3 \cdot j_{fi}^\mu(r) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} A_\mu^*(k) \exp(-ikr).$$

Hierbei ist $A^\mu = (\Phi_{\omega jm}, A_{\omega jm})$ und $j_{fi}^\mu = (\rho_{fi}, \mathbf{j}_{fi})$ mit $\rho_{fi} = \psi_f^* \psi_i$ und \mathbf{j}_{fi} die Stromdichte (ohne Spin also: $\mathbf{j}_{fi} \propto \psi_f^* \nabla \psi_i - \psi_i \nabla \psi_f^*$).

Zur Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit unter Aussendung *elektrischer* Photonen des Drehimpulses j , die wir zunächst durchführen wollen, setzen wir $C = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}$. Diese Wahl von C ist gerade derart, daß die Kugelfunktionen der Ordnung $l = j - 1$ wegfallen. Wir können dann die Kugelfunktionen der Ordnung $l = j + 1$ vernachlässigen und $A \equiv 0$ setzen, denn die Ordnung $l = j$ ist bereits in Φ enthalten (das rechtfertigt sich eigentlich erst nach einer vollständigen Rechnung). Mit $A^\mu = \left(\Phi = -\sqrt{\frac{j+1}{j}} \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|k| - \omega) Y_{jm}(n), 0 \right)$ ergibt sich für das Übergangsmatrixelement:

$$V_{fi} = -e \sqrt{\frac{j+1}{j}} \frac{\sqrt{\omega}}{2\pi} \int d^3 x \cdot \rho_{fi}(r) \int d\Omega \cdot \exp(-ikr) Y_{jm}^*(n).$$

Das innere Integral kann man nun über geeignete Kugelflächenentwicklungen von $\exp(-ikr)$, wobei man wegen der Näherung $R \ll \lambda$ nur die ersten Glieder mitnimmt, lösen. Wir geben das Ergebnis an:

$$V_{fi} = (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}} \frac{\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!} e \left(Q_{j,-m}^{(el.)} \right)_{fi}, \quad (\text{A.9})$$

wobei

$$\left(Q_{jm}^{(el.)} \right)_{fi} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \int \rho_{fi}(r) r^j Y_{jm} \left(\frac{r}{|r|} \right) d^3 x. \quad (\text{A.10})$$

Die quantenmechanisch berechneten Größen (A.10) werden als *elektrische 2^j -Polmomente zu einem Übergang* bezeichnet in Analogie zu den entsprechenden klassischen Größen. Endlich wissen wir, warum Photonen der Parität $(-1)^j$ elektrische Photonen genannt werden.

Manche Leute fügen in der Formel (A.10) noch einen Faktor $\frac{3}{l+3}$ ein, um die Näherungen auszugleichen und so eine sicherere Schätzung für die Zerfallswahrscheinlichkeit zu erhalten. Wir verzichten darauf, da wir die Formel hier sowieso nicht praktisch anwenden wollen.

Noch ein paar kurze Worte zur *Doppelfakultät*: Sie ist wie folgt definiert:

$$(2n+1)!! := \frac{(2n+1)!}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1).$$

Jetzt können wir noch abschließend die Übergangswahrscheinlichkeit für Aussendung elektrischer Photonen des Drehimpulses j angeben:

$$w_{jm}^{(el.)} = \frac{2(2j+1)(j+1)}{j[(2j+1)!!]^2} \omega^{2j+1} e^2 \left| \left(Q_{j,-m}^{(el.)} \right)_{fi} \right|^2.$$

Die Lebensdauer des angeregten Kerns bezüglich dieses Zerfalls (sofern er nicht sowieso durch die Auswahlregeln verboten ist) berechnet sich als Kehrwert: $\tau_{jm}^{(el.)} = \frac{1}{w_{jm}^{(el.)}}$.

Wir erkennen also an diesen Formeln, daß unsere qualitative Beschreibung in der Vorbereitung richtig ist: Mit steigendem j sinkt die Zerfallswahrscheinlichkeit, die Lebensdauer steigt; im wesentlichen aufgrund des Terms mit der Doppelfakultät. Zerfälle werden also möglichst über den Zerfall mit der geringsten Drehimpulsänderung ablaufen. Weiterhin ist die Zerfallswahrscheinlichkeit groß und die Lebensdauer klein, wenn die Energiedifferenz zwischen Mutter- und Tochterkern groß ist.

Jetzt noch zum Zerfall unter Aussendung *magnetischer* Photonen des Drehimpulses j . Mittels Einsetzen von $A^\mu = \left(\Phi = 0, A = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|k| - \omega) \mathbf{Y}_{jm}^{(mag.)} \right)$ erhält man für das Übergangsmatrixelement:

$$V_{fi} = -e \frac{\sqrt{\omega}}{2\pi} \int d^3x \cdot \mathbf{j}_{fi}(r) \int d\Omega \cdot \exp(-ikr) \mathbf{Y}_{jm}^{(mag.)*}(n).$$

Wiederum berechnen wir das innere Integral über die Kugelflächenentwicklungen von $\exp(-ikr)$, und nähern mittels $R \ll \lambda$, sodaß nur die ersten Glieder wichtig sind. Nach Einsetzen von $\mathbf{Y}_{jm}^{(mag.)}$ und einigen Umformungen ergibt sich Formel (A.9), wenn man darin $\left(Q_{j,-m}^{(el.)} \right)_{fi}$ durch $\left(Q_{j,-m}^{(mag.)} \right)_{fi}$ ersetzt, wobei

$$\left(Q_{jm}^{(mag.)} \right)_{fi} = \frac{1}{j+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \int (r \times \mathbf{j}_{fi}) \cdot \nabla (r^j Y_{jm}) d^3x. \quad (\text{A.11})$$

Diese Größen (A.11) werden als *magnetische 2^j -Polmomente zu einem Übergang* bezeichnet. Für $j=1$ haben die Größen $\left(Q_{1m}^{(mag.)} \right)_{fi}$ eine ähnliche Struktur wie das klassische magnetische Moment. Das ist der Grund, warum Photonen der Parität $(-1)^{j+1}$ magnetische Photonen genannt werden.

Die Aussagen über die Übergangswahrscheinlichkeiten und Lebensdauern, die wir bei den elektrischen Photonen getroffen haben, gelten hier entsprechend. Wir geben hier nun noch an, daß man auch noch folgendes aus den Formeln ziehen kann: Es gilt:

$$\tau_{jm}^{(mag.)} = 4,5 \cdot A^{\frac{2}{3}} \cdot \tau_{jm}^{(el.)},$$

wobei hier A die Massenzahl des angeregten Kernes ist. Am wahrscheinlichsten sind also E1-Zerfälle, gefolgt von M1-Zerfällen, dann E2, M2, E3, usw. Damit schließen wir nun die Ergänzungen unseres Anhangs.

Literaturverzeichnis

Im folgenden wollen wir auf die Versuchsprotokolle der anderen Experimente im Fortgeschrittenenpraktikum, die von uns durchgeführt wurden und das vorliegende Protokoll hinsichtlich der theoretischen Grundlagen ergänzen, verweisen. Außerdem stellen wir eine Liste der Literatur auf, die wir am stärksten (nicht als einzige) zur Vorbereitung und Auswertung nutzten.

- [FP-7] O. Flimm, U. Münch: γ - γ -Koinzidenz, Versuch 7 im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [FP-9] O. Flimm, U. Münch: α -Reichweite, Versuch 9 im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [FP-11] O. Flimm, U. Münch: β -Szintillation, Versuch 11 im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [FP-17] O. Flimm, U. Münch: Ge(Li)- γ -Spektroskopie, Versuch 17 im Fortgeschrittenenpraktikum am Institut für Kernphysik. Versuchsprotokoll. Köln, 1994
- [Mar] P. Marmier: *Kernphysik I*. 9. Auflage. Zürich: Verlag der Fachvereine, 1960, 1977
- [MS] P. Marmier, E. Sheldon: *Physics of nuclei and particles*, volume 1. Academic Press, 1969
- [Rel1] Prof. F. W. Hehl: *Relativitätstheorie I*. Vorlesungsmitschrift von U. Münch. Köln, WS 1993/94
- [Led] C. Michael Lederer, Virginia S. Shirley: *Table of Isotopes*. 7. Auflage, Wiley & Sons.
- [KK] V. Kment, A. Kuhn: *Technik des Messens radioaktiver Strahlung*. 2. Auflage. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 1963

Zum Anhang:

- [Jän] K. Jänich: *Analysis für Physiker und Ingenieure*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1990
- [Butt] Haro v. Buttler: *Einführung in die Grundlagen der Kernphysik*. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft, 1964
- [Jac] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 1975
- [LaL4] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band 4: Quantenelektrodynamik. 6. Auflage. Berlin: Akademie-Verlag, 1986

Index

- Abfallzeiten, 25
- Absorption, totale, 8
- Absorptionskoeffizient, 15, 35
 - Gesamt-, 15
- Absorptionsstärke beim Photoeffekt, 9
- α -Strahlung, 2
- angeregter Zustand, 3
- Anstiegszeiten, 25
- Auswahlregeln, 3
 - der Energie, 3
 - der Parität, 6
 - des Drehimpulses, 5
- β -Strahlung, 2
- Beton, 34
- Bindungsenergie, 9
- charakteristische Röntgenstrahlung, 9
- Comptoneffekt/-streuung, 9, 11
 - Wirkungsquerschnitt, 13
- Comptonkante, 13, 20
- Diracsee, 14
- diskrete Energieniveaus, 2
- Doppelfakultät, 43
- Double-Escape-Peak, 20
- Drehimpuls
 - Auswahlregeln, 5
- Dynode, 18, 26
- Efficiency, 23, 33
- Eichung
 - Halbleiterdetektor, 30
 - Szintillationsdetektor, 28
- Eigenwertgleichungen, 39, 41
- Einkanaldiskriminator, 19
- elektrische Multipolstrahlung, 6, 42
- elektrische Polmomente zu einem Übergang, 42
- elektromagnetische Strahlung, 1
- Elektronenradius
 - klassischer, 13
- Elektronenvolt eV, 1
- Emissionswahrscheinlichkeit, 42
- Energie
 - Auswahlregeln, 3
- Energie-Impuls-Beziehung, 11
- Energieauflösung, 19
 - des Halbleiterdetektors, 33
 - des Szintillationsdetektors, 28
- Energieniveaus, diskrete, 2
- Erhaltungsgrößen, 3
- Feinstrukturkonstante, 10
- Fremdatome, 17
- Full-energy-Peak, 20
- FWHM, 19
- Gesamtabsorptionskoeffizient, 15
- Gesamtspin, 4
- Grundzustand, 3
- Halbleiterdetektor, 19
- Hauptverstärker, 19
- Hintergrundstrahlung, 33
- Impulsabfallzeiten, 25
- Impulsanstiegszeiten, 25
- inelastisch/inkohärent, 11
- inkohärente Streuung, 8
- innere Konversion, 7
- Intensitäten, 16
- isomere Zustände, 7
- Kernspin, 4
- klassischer Elektronenradius, 13
- Klein-Nishina-Formel, 13
- kohärente Streuung, 8
- Konversion, innere, 7
- Kugelflächenfunktionen, 39
 - Parität von, 39
- Lebensdauer, 7, 42
- Legendre-Polynome, 38
 - zugeordnete, 38
- Legendresche Differentialgleichung, 38
- lichtelektrischer Effekt, 9
- magnetische Multipolstrahlung, 6, 43
- magnetische Polmomente zu einem Übergang, 43
- Meßdaten, 22–24
- Multipolentwicklung, 5
- Multipolordnung, 5

- Multipolstrahlung
 - elektrische, 6, 42
 - magnetische, 6, 43
- net integral, 23
- Nukleon, 2
- Paarbildung, 9, 14
 - Wirkungsquerschnitt, 14
- Parität, 5, 40
 - Auswahlregeln, 6
- Peak-to-total-ratio, 23
- Photo-Peak, 20
- Photoeffekt, 9
 - Absorptionsstärke, 9
 - Winkelverteilung, 10
 - Wirkungsquerschnitt, 10
- Photomultiplier, 17
- Photonen, 40–43
 - Drehimpulse, 40
 - Parität, 40
- Polmoment
 - elektrisches, 42
 - magnetisches, 43
- Rodriguez, Formel von, 38
- Röntgenstrahlung
 - charakteristische, 9
- Rückstreu-Spitze, 21
- Rydberg-Konstante, 9
- Sekundärelektronenvervielfacher, 17
- Single-Escape-Peak, 20
- Skalare, 11
- Spektrum, 20
 - unbekanntes, 31–33
- Strahlung
 - elektromagnetische, 1
- Streukoeffizient, Thomson'scher, 10
- Streuung
 - inkohärente, 8
 - kohärente, 8
- Szintillationskristall, 17
- Szintillationszähler, 17
- Thomson'scher Streukoeffizient, 10
- totale Absorption, 8
- Übergangswahrscheinlichkeit, *siehe* Emissionswahrscheinlichkeit
- unbekanntes Spektrum, 31–33
- Vielkanalanalysator, 19
- Vierer-Vektoren, 11
- Vorverstärker, 19
- Winkelverteilung beim Photoeffekt, 10
- Wirkungsquerschnitt
 - Comptoneffekt, 13
 - Paarbildung, 14
 - Photoeffekt, 10
- zugeordnete Legendre-Polynome, 38