

Seminar über spezielle Funktionenräume

# Anwendung der Fourier-Transformation auf die Lösung partieller Differentialgleichungen

von Uwe Münch

## 0.1 Ziele und Idee

An verschiedenen partiellen Differentialgleichungen möchte ich beispielhaft zeigen, wie man die Fouriertheorie zur Lösung dieser Differentialgleichungen benutzen kann und welche Methoden man verwendet.

Eine **Partielle Differentialgleichung** ist eine Gleichung, deren Lösung eine Banachraumwertige Funktion mehrerer reeller Variablen ist; also eine Gleichung zwischen einer Funktion mehrerer Variablen, deren partiellen Ableitungen nach diesen Variablen und den Variablen selbst. Z. B. sieht eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (*Ordnung* der Dgl. = höchste vorkommende Ordnung der Ableitungen) für die Funktion zweier Variablen  $u = (x, t)$  allgemein so aus:

$$F\left(u(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x, t), x, t\right) = 0.$$

Als ‚Anfangsbedingungen‘ sind zum Beispiel  $u(\cdot, t_0)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_0)$  für ein festes  $t_0$  vorgegeben.

In den Vorträgen [Ra], [Pü] und [Va] haben wir u. a. kennengelernt, daß unter Fouriertransformation komplexwertiger Funktionen (speziell: reellwertiger Funktionen) Differentiation in Multiplikation übergeht:

$$c_n(f') = i n c_n(f) \quad \text{für alle } n, \text{ bzw.} \quad (f')^\wedge(t) = i t f^\wedge(t).$$

Wir wollen im folgenden nur solche partielle Differentialgleichungen betrachten, deren komplexwertige (reellwertige) Lösungsfunktionen von zwei Variablen abhängen. Fourierentwickeln wir die Lösungsfunktionen nach einer dieser Variablen (z. B.  $x$ ), so hängen die Fourierkoeffizienten meist nur noch von der anderen Variablen  $t$  ab (z. B. bei linearen part. Dgl.). Häufig gehorchen die Fourierkoeffizienten also einer *gewöhnlichen Differentialgleichung*, deren Lösungen wir in den meisten Fällen schon kennen.

Sollten wir diese gewöhnlichen Differentialgleichungen aber auch nicht lösen können, so können wir auch die Fourierkoeffizienten (die ja noch eine Funktion von  $t$  sind) Fourierentwickeln. Wir erhalten dann meist für diese Koeffizienten *algebraische Gleichungen*. Diese sind im Vergleich am leichtesten lösbar. Allerdings erkaufen wir uns diese Erleichterung mit dem Problem der Rücktransformation.

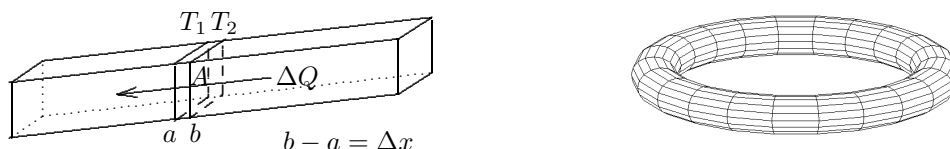
## 0.2 Die Beweisstrategie für die folgenden Aussagen

Unser Vorgehen beim Beweis der folgenden Sätze wird daher so aussehen:

Wir werden annehmen, es gebe eine Lösung  $u(x, t)$  für die Differentialgleichung, die die im Satz geforderten Eigenschaften erfüllt. Mit Hilfe der Fourierentwicklung untersuchen wir die ‚analytischen Gesetzmäßigkeiten‘ von  $u(x, t)$  solange, bis wir eine ‚gutartige‘ Gestalt für  $u(x, t)$  angeben können. Diese Gestalt ist eine *notwendige Darstellung* von  $u(x, t)$  ( $\implies$  Eindeutigkeit). Wenn es uns gelingt, alle Forderungen aus dem Satz für diese Darstellung zu zeigen, so ist auch die Existenz gesichert.<sup>1</sup>

## 1 Die 1– dimensionale Wärmeleitungsgleichung

Wir interessieren uns im folgenden meist für Temperaturverteilungen in einem Stab oder Torus, wobei die Temperatur innerhalb eines Querschnitts jeweils gleich sein soll.



In den meisten Fällen wird also eine Temperaturverteilung in den Körpern zu einem festen Zeitpunkt bekannt sein und das Verhalten der Temperaturverteilung zu späteren Zeitpunkten interessieren.<sup>2</sup>

### 1.1 Vom Problem zur partiellen Differentialgleichung

Um das soeben dargestellte Problem mit einem geeigneten mathematischen Modell beschreiben zu können, geht man von folgenden zwei experimentellen Tatsachen aus:

$$\Delta Q = m \cdot c_v \cdot \Delta T = c_v \cdot \rho \cdot V \cdot \Delta T \quad (1)$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -k \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \text{mit } k > 0 \quad (2)$$

Dabei beschreibt Gleichung (1) die Tatsache, daß eine Wärmeänderung (= Energieänderung) eine Temperaturänderung bewirkt in Abhängigkeit der stoffspezifischen Konstanten  $c_v$  ( $> 0$ , *spezifische Wärme*) und  $\rho$  ( $> 0$ , *Dichte*) und der körperabhängigen Größe  $V$  (*Volumen*).

Gleichung (2) beschreibt die experimentelle Erfahrung, daß bei einer Temperaturdifferenz zwischen zwei Orten Wärme vom wärmeren Ort zum kälteren Ort fließt ( $k > 0$ , negatives Vorzeichen). Dies geschieht in Abhängigkeit des durchfließbaren Querschnitts  $A$  und der stoffspezifischen Konstante  $k$  (das ist die sogenannte *Wärmeleitzahl* bzw. der *Wärmeleitkoeffizient*).

Durch Gleichsetzen dieser Gleichungen, Bilden von Grenzübergängen, usw. erhält man als partielle Differentialgleichung die sogenannte *Wärmeleitungsgleichung* oder *Diffusionsgleichung*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{mit } c > 0, \quad (3)$$

wobei  $c := \frac{k}{c_v \cdot \rho}$  (*Diffusionskonstante*).

<sup>1</sup>Solch eine Beweisstrategie wurde zum Beispiel auch in 11.4, [Ana] (Trennung der Variablen) benutzt.

<sup>2</sup>Da Temperaturen reell sind, sind alle Funktionen in diesem Abschnitt 1 reellwertig.

## 1.2 Lösungen der Diffusionsgleichung

### 1.2.1 Torus der Länge $2\pi$

**Theorem: Voraussetzung:** Vorgegeben sei eine stetige,  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}$  (Temperaturverteilung zum Zeitpunkt  $t = 0$ ).

**Behauptung:** Dann existiert eine eindeutig festgelegte Funktion  $T(x, t)$  für  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $T(x, t)$  ist  $2\pi$ -periodisch in  $x$  für alle  $t > 0$ .
- (ii) Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  und  $\frac{\partial T}{\partial t}$  existieren und sind stetig für  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .
- (iii)  $T(x, t)$  erfüllt die Wärmeleichung (3).
- (iv)  $T(x, t)$  konvergiert für  $t \rightarrow 0+$  gleichmäßig gegen  $f$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|T - f\|_\infty = \lim_{t \rightarrow 0+} \left[ \max_x |T(x, t) - f(x)| \right] = 0.$$

**Darstellungen:**  $T(x, t)$  läßt sich darstellen als

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-cn^2 t} e^{in(x-y)} \right] f(y) dy = p_t * f \quad (4)$$

mit

$$p_t(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-cn^2 t} e^{inx}.$$

Dies läßt sich weiter umformen zu dem handlicheren Ausdruck:

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4ct}} f(x+y) dy \quad (5)$$

Für den Beweis benötigen wir folgendes

**Lemma:** Sei  $f$  aus  $L^1(\mathbb{R})$  und stetig differenzierbar, so daß  $\sum_{-\infty}^{\infty} f'(x + 2\pi n)$  gleichmäßig auf  $[0, 2\pi[$  konvergiert. Weiterhin konvergiere auch die Reihe  $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + 2\pi n)$  für mind. ein  $x_0 \in [0, 2\pi[$ . Dann konvergiert auch  $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n)$  gleichmäßig auf ganz  $[0, 2\pi[$  und<sup>3</sup>:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(n) e^{inx}$$

### 1.2.2 Gerade und ungerade Funktionen

Wenn  $f$  *ungerade* ist, so gilt dasselbe für die  $x$ -Abhängigkeit von  $T(x, t)$  (vgl. Gleichung (5)). Weil daher  $T(x, t)$  als Sinus-Reihe darstellbar ist, folgt weiter:  $T(0, t) = T(\pi, t) = 0$  für alle  $t > 0$ .

Analog: Wenn  $f$  *gerade* ist, so gilt dasselbe für die  $x$ -Abhängigkeit von  $T(x, t)$  (vgl. Gleichung (5)). Deshalb ist  $\frac{\partial T}{\partial x}$  ungerade. Daher gilt:  $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\pi, t) = 0$  für alle  $t > 0$ ; das bedeutet: kein Wärmefluß durch  $x = 0$  bzw.  $x = \pi$ .

Wir interessieren uns für die Umkehrungen:

---

<sup>3</sup>Aus dieser Formel läßt sich auch leicht die *Poisson-Summenformel*  $\sum_{-\infty}^{\infty} f(bn) = \frac{\sqrt{2\pi}}{b} \sum_{-\infty}^{\infty} f^\wedge\left(\frac{2\pi}{b}n\right)$  mit einem  $b > 0$  beweisen.

**Aussage:** Falls ein  $x_0$  existiert, so daß  $T(x_0, t) = 0$  für alle  $t > 0$ , dann ist  $f(x - x_0)$  ungerade (insbesondere folgt also auch:  $T(x_0 + \pi, t) = 0$  für alle  $t > 0$ ).

**Aussage:** Falls ein  $x_0$  existiert, so daß  $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t) = 0$  für alle  $t > 0$ , dann ist  $f(x - x_0)$  gerade (insbesondere folgt also auch:  $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0 + \pi, t) = 0$  für alle  $t > 0$ ).

### 1.2.3 Stäbe endlicher Länge

**Satz 1:** *Stab mit gleichen Randtemperaturen  $T_{\text{Rand}} \stackrel{\text{GE}}{=} 0$ :*

**Voraussetzung:** Die Funktion  $f$  sei aus  $\mathcal{C}^0([0, \pi])$  mit  $f(0) = f(\pi) = 0$ .

**Behauptung:** Dann existiert eine eindeutig festgelegte Funktion  $T(x, t)$  für  $t > 0$ ,  $x \in [0, \pi]$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i) Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  und  $\frac{\partial T}{\partial t}$  existieren und sind stetig für alle  $x \in [0, \pi]$  und  $t > 0$ .
- (ii)  $T(x, t)$  erfüllt die Wärmeleichung (3).
- (iii)  $T(0, t) = T(\pi, t) = 0$  für alle  $t > 0$ .
- (iv)  $T(x, t)$  konvergiert für  $t \rightarrow 0+$  gleichmäßig gegen  $f$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|T - f\|_{\infty} = \lim_{t \rightarrow 0+} \left[ \max_x |T(x, t) - f(x)| \right] = 0.$$

**Satz 2:** *Stab mit isolierten Rändern:*

**Voraussetzung:** Die Funktion  $f$  sei aus  $\mathcal{C}^0([0, \pi])$ , es gelte:  $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\pi, t) = 0$  für alle  $t > 0$ .

**Behauptung:** Dann gilt die Behauptung aus Satz 1 mit Ausnahme von (iii).

**Satz 3:** *Stab mit fester Randtemperatur  $T_{\text{Rand}} \stackrel{\text{GE}}{=} 0$  an einem Ende, das andere Ende isoliert:*

**Voraussetzung:** Die Funktion  $f$  sei aus  $\mathcal{C}^0([0, \frac{\pi}{2}])$  mit  $f(0) = 0$ , (daher gilt auch:  $T(0, t) = 0$  für alle  $t > 0$ ); fordere weiter:  $\frac{\partial T}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, t) = 0$  für alle  $t > 0$ . (Oder: Die Voraussetzungen mit 0 und  $\frac{\pi}{2}$  vertauscht.)

**Behauptung:** Dann gilt die Behauptung aus Satz 1 mit Ausnahme von (iii) für  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Der Beweis zu Satz 1 läuft über Erweitern der Funktionen zu ungeraden,  $2\pi$ -periodischen Funktionen. (Satz 2 analog mit geraden Funktionen). Die Darstellung von  $T(x, t)$  aus Satz 1 ist daher die Sinus-Reihe der Gleichung (4), die von  $T(x, t)$  aus Satz 2 ist die Kosinus-Reihe von (4) (vgl. [Ra]: 3.2).

Der Beweis zu Satz 3 läuft über Erweitern der Funktionen zu ungeraden Funktionen über  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , diese werden zu geraden Funktionen bzgl.  $\frac{\pi}{2}$  bzw.  $-\frac{\pi}{2}$  erweitert und letztlich dann zu  $2\pi$ -periodischen Funktionen ergänzt. Die Darstellung von  $T(x, t)$  sieht dann so aus:

$$T(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{2n-1 \\ n=1}}^{\infty} e^{-cn^2 t} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y) \sin(ny) dy \right) \sin(nx)$$

### 1.2.4 Periodizität in der Zeit

**Satz: Voraussetzung:** Sei  $f(t)$  eine stetige, ungerade,  $2\pi$ -periodische Funktion der Zeit  $t$ . Weiterhin existiere ein  $M$ , so daß  $|T(x, t)| \leq M$  für alle  $t$  und  $x \geq 0$ .

**Behauptung:** Dann gilt die Behauptung aus dem Theorem 1.2.1 mutatis mutandis (man vertausche  $x$  und  $t$  außerhalb der Funktion und den Ableitungen).

**Darstellung:**  $T(x, t)$  hat nun die Gestalt ( $\varepsilon := \operatorname{sgn}(n) = \frac{n}{|n|}$ ,  $\tilde{f}_n = c_n$ ,  $\check{f}_n = b_n$  nach [Ra]: 3.1):

$$T(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n e^{-\sqrt{\frac{|n|}{2c}}x} \cdot e^{i(nt - \varepsilon \sqrt{\frac{|n|}{2c}}x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \check{f}_n e^{-\sqrt{\frac{n}{2c}}x} \sin\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2c}}x\right) \quad (6)$$

### 1.2.5 Bemerkung: Unendlich langer Stab

**Satz: Voraussetzung:** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Behauptung:** Dann existiert eine eindeutig festgelegte Funktion  $T(x, t)$  für  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , die folgende Eigenschaften erfüllt<sup>4</sup>:

- (i) Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  und  $\frac{\partial T}{\partial t}$  existieren für jedes  $(x, t)$ .
- (ii)  $T(x, t)$  erfüllt die Wärmeleichung (3) mit  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  stetig in  $x$  für alle  $t$ .
- (iii) Für alle  $t$  sind  $T$  und  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  aus  $L^1(\mathbb{R})$ .
- (iv)  $T$  erfüllt

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^\wedge = \frac{\partial(T^\wedge)}{\partial t}$$

- (v)  $T(x, t)$  konvergiert für  $t \rightarrow 0+$  gegen  $f$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$ :  

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|T - f\|_1 = 0.$$

## 2 Die 1-dimensionale Wellengleichung

Wir interessieren uns im folgenden für die Schwingungen einer eingespannten Saite, die folgende Bedingungen erfüllt (Auslenkung  $u(x, t)$ , Länge  $L$ ):

$$u \ll L, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$$

Diese Bedingungen werden von realen Geigensaiten, etc. in der Regel erfüllt.

In den meisten Fällen wird also eine Auslenkung  $u(\cdot, t_0)$  zu einem festen Zeitpunkt  $t_0$  und eine Geschwindigkeit  $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_0)$  bekannt sein und das Verhalten der Auslenkung zu späteren Zeitpunkten interessieren.<sup>5</sup>

### 2.1 Vom Problem zur partiellen Differentialgleichung

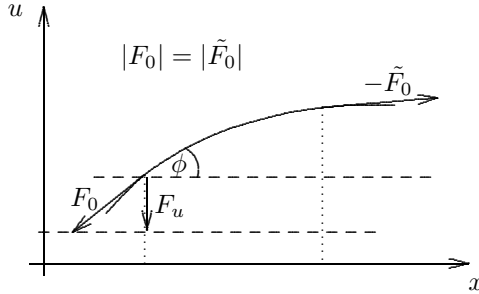
Um wiederum das soeben dargestellte Problem mit einem geeigneten mathematischen Modell beschreiben zu können, gehen wir diesmal von der *Grundgleichung der Mechanik* aus:

$$F = m \cdot a = \rho \cdot V \cdot a, \quad a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

<sup>4</sup>In den Beweis geht noch folgende Aussage ein:

**Aussage:** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $g \in C_C^m$  ( $C$ : kompakter Träger). Dann  $f * g \in C^m$  und  $D^m(f * g) = f * D^m g$ .

<sup>5</sup>Auch im 2. Abschnitt sind alle Funktionen reellwertig, da 1-dim. Auslenkungen und deren Geschwindigkeiten reell sind.



Als zweite Gleichung, die aus nebenstehender Zeichnung ersichtlich ist, benutzen wir (bei festem  $F_0$ ):

$$F_u(x) = F_0 \cdot \sin(\phi(x)) \quad (8)$$

Mittels geeigneten Näherungen, etc. erhält man als partielle Differentialgleichung die sogenannte *Wellengleichung*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9)$$

mit  $c^2 = \frac{F_0}{\rho \cdot A}$ , wobei  $c$  die Bedeutung einer Geschwindigkeit hat.

**Bemerkung:** Freie elektromagnetische Wellen (*Licht, Radiowellen*) und Longitudinalwellen in Gasen oder Festkörpern (*Schall!*) erfüllen die Wellengleichung exakt und benötigen keine Näherungen wie die schwingende Saite. (Für die freie elektromagnetische Welle folgt dies aus den Maxwell'schen Gleichungen, bei den Longitudinalwellen folgt dies mittels Kompressionsmodul (Gase) bzw. Elastizitätsmodul (Festkörper) aus dem Hooke'schen Gesetz).

## 2.2 Lösungen der Wellengleichung

### 2.2.1 Theorem

**Voraussetzungen:** Die Endpunkte der Saite liegen bei  $x = 0$  und  $x = \pi$  (also Länge der Saite gleich  $\pi$ ). Die Auslenkung  $u(\cdot, 0)$  und die Geschwindigkeit  $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  seien als Funktionen  $f \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$  und  $g \in \mathcal{C}^1([0, \pi])$  vorgegeben, wobei  $f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0$  gelten soll.

**Behauptung:** Dann existiert eine reellwertige Funktion  $u(x, t)$  für  $t > 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , so daß:

- (i)  $u(x, t) \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$ .
- (ii)  $u(x, t)$  erfüllt die Wellengleichung (9).
- (iii)  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  für alle  $t > 0$ .
- (iv)  $u(x, t) \rightarrow f(x)$ , gleichmäßig für  $t \rightarrow 0+$ .
- (v)  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \rightarrow g(x)$ , gleichmäßig für  $t \rightarrow 0+$ .

**Darstellung:**  $u(x, t)$  hat die Gestalt

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \cdot [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy \quad (10)$$

### 2.2.2 Bemerkung

Die notwendige Gestalt (10) erhält man bereits unter den Voraussetzungen:  $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi])$  und die Fourier-Reihe von  $f$  konvergiere für alle  $x$  gegen  $f(x)$ . Diese Bedingungen erfüllen z. B. stetige Funktionen, die von beschränkter Variation sind, bzw. lipschitz-stetige Funktionen. (vgl. [Pü]).

Allerdings sind die  $u(x, t)$  unter diesen Voraussetzungen im allg. keine Lösung der Wellengleichung, da dafür die  $u(x, t)$  nicht hinreichend oft differenzierbar sind.

### 2.2.3 Satz

Die Länge einer Saite sei  $\pi$ , ihre Masse sei  $m$ . Dann gilt:

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + c^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \int_0^\pi [c^2 \cdot (f')^2 + g^2] dx$$

Die rechte Seite ist von der Zeit  $t$  unabhängig und ist die *Gesamtenergie* der Saite (bis auf den Faktor  $\frac{m}{2\pi}$ ), da die Terme auf der linken Seite die kinetische bzw. die potentielle Energie der Saite sind (ebenfalls bis auf den Faktor  $\frac{m}{2\pi}$ ; zur potentiellen Energie: beachte  $c^2 \frac{m}{\pi} \stackrel{L=\pi}{=} \frac{F_0}{\rho \cdot A \cdot L} \cdot m = F_0$ ).

## 3 Weitere Beispiele

Natürlich gibt es noch zahlreiche andere partielle Differentialgleichungen, die man mit obiger Methode lösen kann.

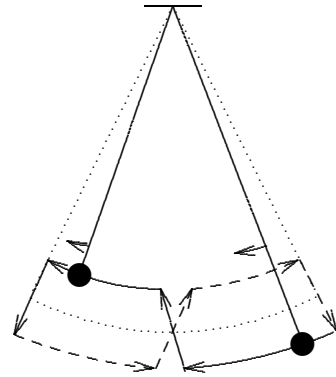
### 3.1 Störungsrechnung

Zunächst lege ich hier ein Ergebnis aus [Zi] dar. Die einzelnen physikalischen Überlegungen sind sehr kompliziert; daher folgt hier nur eine Skizze darüber.

#### 3.1.1 Parametrische Resonanz oder: Die Kinderschaukel

Reale Pendel schwingen gedämpft, d. h. ihre Schwingungsauslenkung wird (bei einmaliger Auslenkung oder Anregung) zeitlich gegen eine stabile Ruhelage konvergieren. Wenn man also eine Schaukel einmal von außen anstößt, so hängt sie irgendwann einfach wieder herunter.

Falls ein Pendel mit kleinen Auslenkungen schwingt, so kann man es durch periodische Änderung eines Parameters dennoch zu großen Schwingungen anregen. Auf einer Schaukel verändert man z. B. die Lage seines Schwerpunktes geringfügig, wenn man schaukelt; dies bewirkt wegen  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  ( $g = 9,81 \frac{m}{sec^2}$ ,  $l$ : Länge Aufhängepunkt — Schwerpunkt) eine kleine periodische Schwankung der Schaukeelfrequenz  $\omega$ .



Man sieht also: Eine nur sehr geringe Störung eines Parameters kann große Auswirkungen haben.

#### 3.1.2 Kann die Erde von der Sonne wegfliegen?

Im allg. betrachtet man nur das System Erde — Sonne, wenn man die Bewegung der Erde um die Sonne untersucht. Dennoch wird die Erde auch von den anderen Planeten angezogen und somit periodisch gestört. Kann die Erde also (wie die Schaukel) ihre Ruhelage, die Erdumlaufbahn, verlassen?

Als Antwort erhält man: Wenn man die folgende Dgl. für  $S(\phi, t)$  (reellwertig) lösen kann, weiß man sicher, daß die Erde in ihrer Umlaufbahn verbleibt:

$$\omega \frac{\partial S}{\partial \phi}(\phi, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(\phi, t) = -H(\phi, t)$$

mit  $H \in C^1$  reellwertig,  $H(\phi, t) = H(\phi, t + \frac{2\pi}{\Omega})$  und  $\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \left( \int_0^{2\pi} H(\phi, t) d\phi \right) dt = 0$  (\*) ( $H$  beschreibt die  $\frac{2\pi}{\Omega}$ -periodische Störung.),  $\omega$ : Frequenz des Erdumlaufs um die Sonne,  $t$ : Zeit,  $\phi$ : Winkel.

Um die Dgl. zu lösen, fourierentwickeln wir  $S$  und  $H$  bzgl.  $\phi$  und  $t$ ; wegen (\*) ist  $h_{0,0} = 0$ :

$$H(\phi, t) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \setminus (0,0)} h_{m,n} e^{i(m\phi + n\Omega t)}, \quad S(\phi, t) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}} s_{m,n} e^{i(m\phi + n\Omega t)}$$

Für die Fourierkoeffizienten gilt dann die algebraische Gleichung  $(i\omega m + in\Omega)s_{m,n} = -h_{m,n}$ . Mittels dieser Gleichung lassen sich genau dann die  $s_{m,n}$  definieren, wenn  $\omega$  und  $\Omega$  *nicht* *kommensurabel* sind (d. h.  $\frac{\omega}{\Omega} \notin \mathbb{Q}$ ,  $s_{0,0}$  definiere als Null oder eine andere beliebige Konstante). Das bedeutet im allg. noch nicht, daß die Reihe für  $S$  auch konvergiert; falls sie es nicht tut, kann man mit anderen Mitteln zeigen, daß die Erde dennoch in ihrer Umlaufbahn verbleibt.

Falls aber  $\frac{\omega}{\Omega} \in \mathbb{Q}$ , so existieren  $(m, n)$ , so daß  $m\omega + n\Omega = 0$ , also existiert  $s_{m,n}$  nicht. Dann läßt sich zeigen, daß im allg. die Erde ihre Umlaufbahn chaotisch verläßt.

Kommensurabilität ist aber die Ausnahme, da die rationalen Zahlen eine  $\lambda$ -Nullmenge bilden. Sollte die Erde eines Tages dennoch im Weltall verschwinden, so war dies ein „Spezialfall“.

### 3.2 Die 1-dimensionale Schrödingergleichung

Ein weiteres wichtiges Beispiel zur Anwendung der Fouriertheorie ist die *Schrödingergleichung*. Diese bekannte Differentialgleichung ist grundlegend für die Quantenmechanik. Sie lautet:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) \quad (11)$$

Dabei ist  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$  das sogenannte *Planck'sche Wirkungsquantum*,  $m$  die Masse des zu beschreibenden Teilchens und  $V$  eine reellwertige Funktion, das sogenannte *Potential*.

Die komplexwertigen Lösungen  $\psi(x, t)$  sind sogenannte *Wahrscheinlichkeitsamplituden*. Physikalisch treten sie nur als  $|\psi(x, t)|^2 dx$  in Erscheinung. Dieses Betragsquadrat beschreibt die *Wahrscheinlichkeit*, das Teilchen der Masse  $m$  im Intervall  $[x, x + dx]$  zum Zeitpunkt  $t$  anzutreffen.

## 4 Literatur

- [HE] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis*, Teil 2. Fünfte Auflage. Stuttgart: Teubner Verlag, 1990
- [Za] A. C. Zaanen: *Continuity, Integration and Fourier Theory*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1989
- [Ana] H. Reckziegel: *Definitionen, Formeln, Sätze zu den Vorlesungen Analysis I-III*. Vorlesungsskript. Köln, 1990-1992
- [Zi] M. R. Zirnbauer: *Klassische Mechanik*. Vorlesungsskript. Köln, 1991-1992
- [Ra] U. Radermacher: *Fourier-Reihen stetiger Funktionen*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1992
- [Pü] M. Pütz: *Fourier-Reihen integrierbarer Funktionen*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1992
- [Va] A. Vatter: *Fourier-Transformation, Fourier-Umkehr und der Satz von Plancherel*. Unveröffentlichter Seminarvortrag. Köln, 1993